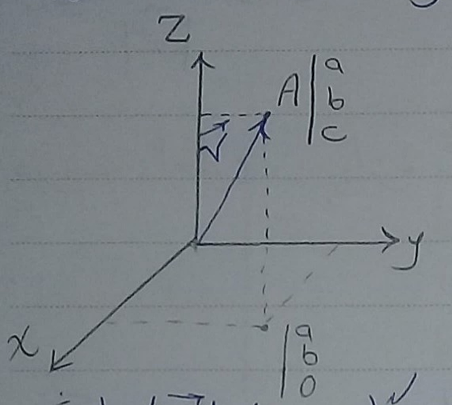
ریاضی عمومی 2
Subject
Date خانم دلدار

« به نام خدا »

یادآوری: تعریف: هر بردار در فضا را می‌توان به صورت $\vec{v} = ai + bj + ck$ نوشت به طوری که ابتدای آن مبدا و انتهای آن نقطه $A \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ باشد.



طول بردار $\vec{v}$ را با $|\vec{v}|$ نشان داده به طوری که $|\vec{v}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$. بردار $\vec{v}$ را یکه می‌نامند هرگاه $|\vec{v}| = 1$ باشد.

دو بردار $\vec{v} = ai + bj + ck$ و $\vec{v}' = a'i + b'j + c'k$ مفروضند در این صورت داریم:

1) جمع دو بردار: $\vec{v} + \vec{v}' = (a+a')i + (b+b')j + (c+c')k$

2) ضرب اسکالر: برای هر $d \in R$ ضرب اسکالر $d\vec{v}$ را به صورت زیر:

$$d\vec{v} = dai + dbj + dck$$

$d > 0$

اگر d مثبت بود بردار $\vec{v}$ و $d\vec{v}$ موازی و هم جهت و اگر $d < 0$ بود بردار $\vec{v}$ و $d\vec{v}$ موازی و در خلاف جهت هم اند. از طرفی داریم:

$$|d\vec{v}| = \sqrt{d^2a^2 + d^2b^2 + d^2c^2} = |d||\vec{v}|$$

اگر $d = |\vec{v}|$:

$$\left|\frac{1}{d}\vec{v}\right| = \left|\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right| = \frac{1}{|\vec{v}|}|\vec{v}| = 1$$

PAPCO

Subject
Date

بنابراین $\frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$ برداری یکه موازی و هم جهت با بردار $\vec{V}$ است.

ضرب داخلی دو بردار: ضرب داخلی 2 بردار $\vec{V}$ و $\vec{V}'$ را با $\vec{V}.\vec{V}'$ نشان داده طوری که:

$$\vec{V}.\vec{V}' = |\vec{V}||\vec{V}'|\cos\theta \quad \underline{1}$$

که در آن θ زاویه‌ی بین 2 بردار $\vec{V}$ و $\vec{V}'$ است از طرفی می‌توان نشان داد:

$$\vec{V}.\vec{V}' = aa' + bb' + cc' \quad \underline{2}$$

از $\underline{1}$ و $\underline{2}$ نتیجه می‌گیریم که:

$$\cos\theta = \frac{\vec{V}.\vec{V}'}{|\vec{V}||\vec{V}'|} \quad 3$$

از $\underline{3}$ نتیجه می‌گیریم که دو بردار $\vec{V}$ و $\vec{V}'$ برهم عمودند اگر و فقط اگر $\vec{V}.\vec{V}'=0$.

ضرب خارجی دو بردار: ضرب خارجی 2 بردار $\vec{V}$ و $\vec{V}'$ را با $\vec{V}\times\vec{V}'$ نشان داده طوری که،

$$\vec{V}\times\vec{V}' = \left(|\vec{V}||\vec{V}'|\sin\theta\right)\vec{n}$$

که در آن θ زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{V}$ و $\vec{V}'$ و $\vec{n}$ برداری یکه عمود بر 2 بردار $\vec{V}$ و $\vec{V}'$ است.

بنابراین $\vec{V}\times\vec{V}'$ نیز بر دو بردار $\vec{V}$ و $\vec{V}'$ عمود است.

PAPCO

Subject
Date

از طریق می‌توان نشان داد:

$$\vec{V} \times \vec{V'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = i(bc' - b'c) - j(ac' - a'c) + k(ab' - a'b)$$

واضح است که:

$$\vec{n} = \frac{\vec{V} \times \vec{V'}}{|\vec{V} \times \vec{V'}|}$$

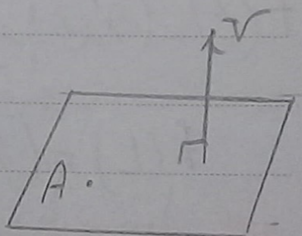
معادله‌ی خط در فضا: معادله‌ی خط گذرنده از نقطه $A\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$ و موازی با بردار $\vec{V} = ai + bj + ck$ (بردار هادی خط) عبارت است از:

معادله پارامتری خط:

$$\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}$$

معادله‌ی دکارتی خط:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$



معادله صفحه در فضا: معادله صفحه گذرنده از نقطه $A\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$ و عمود بر بردار $\vec{V} = ai + bj + ck$ (بردار نرمال صفحه) عبارت است از:

PAPCO

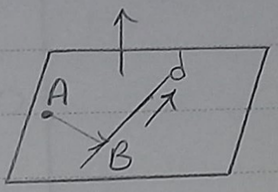
Subject

Date

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

ex) معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که شامل نقطه $A\begin{vmatrix}1\\2\\5\end{vmatrix}$ و خط $d\begin{cases}x=2t\\y=3t\\z=t+2\end{cases}$ باشد.

واضح است که:



حامل خط d ← $\vec{v}_d=2i+3j+k$ بر $\vec{V}$ عمود است، از طرفی با انتخاب نقطه دلخواه $B\begin{vmatrix}0\\0\\2\end{vmatrix}$

یک بردار $\vec{AB}=-i-2j-3k$ را در صفحه بدست آوردیم در نتیجه:

$$\vec{V}=\vec{V}_d\times\vec{AB}=\begin{vmatrix}i & j & k\\2 & 3 & 1\\-1 & -2 & -3\end{vmatrix}=i(-9+2)-j(-6+1)+k(-4+3)=$$

$$\Rightarrow -7i+5j-k$$

معادله صفحه: $-7(x-1)+5(y-2)-1(z-5)=0$

توابع برداری: تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ $(f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2)$ را یک تابع برداری گوییم

به طوری که به ازای هر $t\in\mathbb{R}$،

$$f(t)=(x(t),y(t),z(t))=x(t)i+y(t)j+z(t)k$$

و به همین ترتیب:

$$f(t)=(x(t),y(t))=x(t)i+y(t)j$$

ex)

$$f(t)=ti+\sqrt{1-t}\,j+t^2k$$

$f(0)=0i+j+0k\approx(0,1,0)$ ، $f(1)=i+0j+k\approx(1,0,1)$

$f(2)=2i+?+4k$ → $f(2)$ تعریف نشده

Subject
Date

دامنه توابع برداری: دامنه توابع برداری $f(t)$ عبارتست از:

$$D_{x(t)} \cap D_{y(t)} \cap D_{z(t)}$$

حد توابع برداری:

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = (\lim_{t\to t_0} x(t))i + (\lim_{t\to t_0} y(t))j + (\lim_{t\to t_0} z(t))k$$

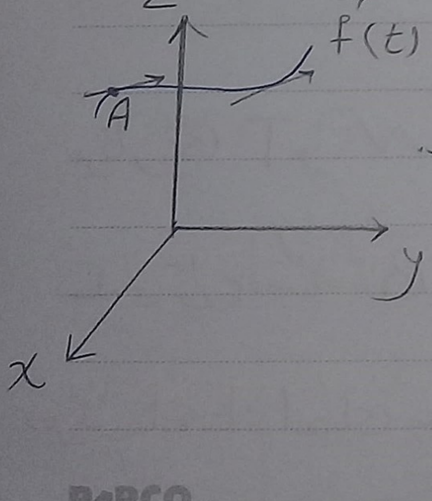
درصورتی که توابع $x(t)$ و $y(t)$ و $z(t)$ در $t=t_0$ دارای حد متناهی باشد.

پیوستگی توابع برداری: تابع $f(t)$ در $t=t_0$ پیوسته است هرگاه تابع $x(t)$ و $y(t)$ و $z(t)$ در $t=t_0$ پیوسته باشد.

مشتق توابع برداری:

$$f'(t) = x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k$$

تعریف: معادله‌ی هر تابع برداری نشان دهنده‌ی یک منحنی در فضاست. به طوری که در هر لحظه $t=t_0$ نقطه $A \left| \begin{matrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0) \end{matrix} \right.$ بر منحنی واقع است. به عبارت دیگر توابع برداری معادله‌ی حرکت یک جسم در فضاست. به همین دلیل توابع برداری را معادله حرکت یک جسم نیز می‌نامند.



معمولاً توابع برداری را به صورت $R(t)$ نیز می‌نویسند.

$$\vec{R}(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$$

PAPCO

Subject
Date

در لحظه $t=t_0$ بردارهای سرعت و شتاب به صورت زیر است:

$$\vec{V}(t_0)=R'(t_0)=x'(t_0)i+y'(t_0)j+z'(t_0)k$$

$$a(t)=R''(t_0)=x''(t_0)i+y''(t_0)j+z''(t_0)k$$

بردار $\vec{V}(t)$ در نقطه $\begin{vmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0) \end{vmatrix}$ A بر منحنی مماس است.

و جهت حرکت جسم را نشان می‌دهد همچنین $|\vec{V}(t)|$ مقدار سرعت را تعیین می‌کند. اکنون می‌توان بردار زیر را بدست آورد:

بردار یکه مماس بر منحنی: $T(\vec{t_0})=\dfrac{V(\vec{t_0})}{|V(t_0)|}$ ← حفظی

بردار قائم دوم $B(\vec{t_0})=\dfrac{V\times a}{|V\times a|}$ ← حفظی

بردار قائم اول $N(t_0)=\vec{B}\times T$ ← حفظی

بردارهای T و N و B در هر نقطه واقع بر منحنی دو به دو بر هم عمودند و در هر نقطه می‌توان دستگاه TNB (دستگاه فرنه) را ساخت.

تعریف انحنا: انحنای منحنی $\vec{R}(t)$ را در لحظه t_0 با K (کاپا) نشان داده

PAPCO

Subject
Date

و عبارت است از تغییرات بردار T نسبت به مسافت طی شده یعنی:

$$K = \frac{|v \times a|}{|v|^3}$$ ← حفظی

تاب منحنی: تاب منحنی $\vec{R}(t)$ را با τ (تاو) نشان داده که عبارت است از تغییرات $\vec{B}$ نسبت به مسافت طی شده داریم:

$$\tau = \frac{|(R' \times R'') \cdot R'''|}{|R' \times R''|^2}$$ ← حفظی

تعریف شعاع انحنا: به عکس K شعاع انحنا گویند و آن را با $\rho = \frac{1}{K}$ نشان می‌دهند.

← حفظی

ex) بردارهای T و N و B را در لحظه $t = \frac{\pi}{4}$ بدست آورید.

$$R(t) = 2\cos t\, i + 2\sin t\, j + t k$$

$$\vec{v}(t) = -2\sin t\, i + 2\cos t\, j + k \ , \ \vec{a}(t) = -2\cos t\, i - 2\sin t\, j + 0k$$

$$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} i + \sqrt{2} j + k \ , \ a\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} i - \sqrt{2} j + 0k$$

$$\left|v\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = \sqrt{2+2+1} = \sqrt{5} \ , \ T\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{5}} i + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} j + \frac{1}{\sqrt{5}} k$$

$$v \times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = i(\sqrt{2}) - j(\sqrt{2}) + k(4)$$

PAPCO

Subject

Date

$$|v \times a| = \sqrt{2+2+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$B = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} i - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} j + \frac{4}{2\sqrt{5}} k$$

$$N = B \times T = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} & \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} & \frac{4}{2\sqrt{5}} \\ \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = i\left(-\frac{5\sqrt{2}}{10}\right) - j\left(\frac{5\sqrt{2}}{10}\right) + k\left(\frac{0}{10}\right)$$

(ex

$$\vec{r}(t) = a\cos t\, i + a\sin t\, j + bt\, k$$

$$k = \frac{|v \times a|}{|v|^3}, \quad \tau = \frac{|(R' \times R'') \cdot R'''|}{|R' \times R''|}, \quad v = R'(t) = -a\sin t\, i + a\cos t\, j + b k$$

$$a = R''(t) = -a\cos t\, i - a\sin t\, j + 0k$$

$$R'''(t) = a\sin t\, i - a\cos t\, j + 0k, \quad v \times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\Rightarrow i(ab\sin t) - j(ab\cos t) + k(a^2)$$

$$|v \times a| = \sqrt{a^2b^2 + a^4} = a\sqrt{b^2 + a^2}, \quad |v| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$k = a, \quad (R' \times R'') \cdot R''' = a^2 b \sin^2 t + a^2 b \cos^2 t = a^2 b$$

PAPCO

$$\rightarrow \tau = \frac{a^2 b}{a\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Subject
Date

فصل 2

توابع دو و سه متغیره: تابع $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ با ضابطه $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

را یک تابع n متغیره می نامیم. در این درس توابع دو متغیره و سه متغیره مورد بررسی قرار می گیرد.

توابع دو متغیره) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad Z = f(x, y)$

توابع سه متغیره) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad W = f(x, y, Z)$

در توابع دو متغیره x و y را متغیر مستقل و Z را متغیر وابسته گویند.

در توابع سه متغیره x و y و Z را متغیر مستقل و W را متغیر وابسته گویند.

ex) تعیین کنید توابع زیر چند متغیره می باشند:

1) $xy - Z + y^2 = 5 \to Z = \underbrace{xy + y^2 - 5}_{f(x,y)}$ دو متغیره

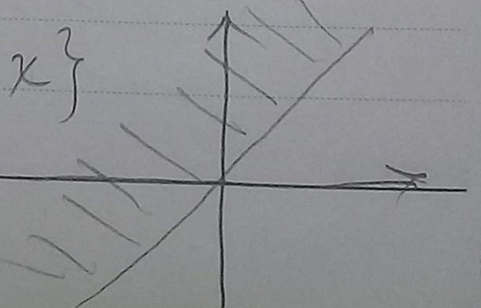
دو متغیره

2) $xy + Z^2 + \ln Z - y^3 = 2x$ در این سوال به راحتی نمی توان Z را برحسب x و y بدست آورد

تعریف: دامنه ی تابع دو متغیره $Z = f(x,y)$ عبارت است از نقاطی از صفحه به طوری که $f(x,y)$ تعریف شده باشد.

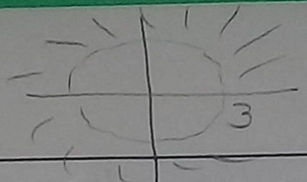
ex) دامنه توابع زیر را بدست آورید.

1) $Z = \underbrace{\sqrt{y - x}}_{f(x,y)}$ $\quad D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x\}$



PAPCO

Subject
Date



بیرون دایره ←

2) $Z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-9}} \Rightarrow D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 > 9\}$

تعریف حد: تابع $Z = f(x,y)$ در نقطه (x_0, y_0) دارای حد L است می‌نویسیم

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ هرگاه:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (x,y), \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow$

$|f(x,y) - L| < \varepsilon$

تعریف: برای محاسبه $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ بر روی مسیر $y = g(x)$ (که در

آن $y = g(x)$ یک منحنی گذرنده از نقطه (x_0, y_0) است) قرار می‌دهیم:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{x\to x_0} f(x, g(x))$$

قضیه: هرگاه $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ بر روی دو مسیر یکسان نباشد، آنگاه تابع $f(x,y)$

در نقطه (x_0, y_0) فاقد حد است.

ex) نشان دهید حدود زیر وجود ندارد:

PAPCO

Subject

Date

مثلاً این حد را روی چند مسیر محاسبه می‌کنیم.

1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} =$

محور x: $y=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$

پس حد ندارد طبق قضیه

$1 \neq 0$

محور y: $x=0$ ↳ $\lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$

$y=2x: \lim \frac{x^2}{x^2+4x^2} = \frac{1}{5}$ ، $y=mx: \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{1}{1+m^2}$

2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^2}{x^4+y^2} \Rightarrow y=mx: \lim_{x\to 0} \frac{x^4-m^2x^2}{x^4+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-m^2}{x^2+m^2} = -1$

محور x: $y=0$ $\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4} = 1$

$1 \neq -1$ پس حد ندارد

3) $\lim \frac{3x^2y}{x^4+y^2} \Rightarrow$ محور x: $\lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4} = 0$ ، محور y: $\lim \frac{0}{y^2} = 0$

$y=mx: \lim \frac{3mx^3}{x^2+m^4x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{3mx}{1+m^4x^2} = 0$ ، $y=mx^2: \lim \frac{3mx^4}{x^4+m^2x^4}$

$= \frac{3m}{1+m^2}$

چون جواب نهایی به m بستگی دارد پس حد ندارد.

PAPCO

Subject
Date

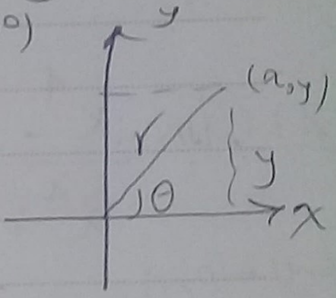
نکته: هرگاه در تابع $f(x,y)=\frac{Q(x,y)}{K(x,y)}$ که در آن $Q(x,y)$ و $K(x,y)$
توابع چند جمله «کنگ یا غیر کنگ» باشد آنگاه داریم:

i) اگر $\deg Q \leq \deg K$ آنگاه f در مبدا فاقد حد است.

ii) اگر $\deg Q > \deg K$ آنگاه f در مبدا دارای حد است.

نکته: هرگاه $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ وجود داشته باشد آنگاه:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$



ex) تعیین کنید کدام یک حدود زیر وجود دارد.

$$1)\ \lim \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\lim \frac{r^3\cos^3\theta+r^3\sin^3\theta}{r^2}=\lim_{r\to 0} r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)=0$$

حد

$$2)\ \lim \frac{y-x}{y+x} \overset{y=mx}{=\!=} \lim \frac{mx-x}{mx+x}=\frac{m-1}{m+1}$$

فاقد حد است

PAPCO

Subject

Date

تعریف پیوستگی: تابع $Z=f(x,y)$ در نقطه (x_0,y_0) پیوسته است هرگاه:

i) $(x_0,y_0)\in D_f$

ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ موجود و متناهی باشد

iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

ex) آیا تابع $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ در مبدا پیوسته است؟ $(0,0)\notin D_f$

پس f در مبدا پیوسته نیست. ولی این تابع در مبدا دارای حد است. اکنون گسترش یافته تابع f را که در مبدا پیوسته است تعریف می‌کنیم:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ex) پیوستگی تابع زیر را در مبدا بررسی کنید:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

i) $(0,0)\in D_f$ و $f(0,0)=0$

ii) $\lim \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim \dfrac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r}=0$

iii) $\lim f(x,y)=f(0,0)$

Subject
Date

ex) ثابت کنید $\lim \frac{x^3 y}{x^6+y^2}$ وجود ندارد.

$$\lim \frac{x^3 y}{x^6+y^2} \underset{=}{\overset{y=mx^3}{=}} \lim \frac{mx^6}{x^6+m^2x^6} = \frac{m}{1+m^2}$$

ex) پیوستگی تابع $f(x,y)=\begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ را در مبدا بررسی کنید:

1) $(0,0)\in D_f$

2) $\lim \frac{2x^2y}{x^4+y^2} \overset{y=mx^2}{=} \lim \frac{2mx^4}{x^4+m^2x^4} = \frac{m}{1+m^2} \to$ حد ندارد $\to$ پیوسته نیست

ex) تابع $f(x,y)=\frac{x^2+y^2-x^3y^3}{x^2+y^2}$ را در مبدا چنان تعریف کنید که تابع در کل صفحه $\mathbb{R}^2$ پیوسته باشد.

حل: تابع گویای f همه جا بجز مبدا، پیوسته است.

f در مبدا دارای حد است و داریم:

$$\lim \frac{x^2+y^2-x^3y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2-r^6\sin^3\theta\cos^3\theta}{r^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} 1-r^4\cos^3\theta\sin^3\theta = 1$$

کافی است گسترش این تابع را به صورت زیر بنویسیم

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2+y^2-x^3y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

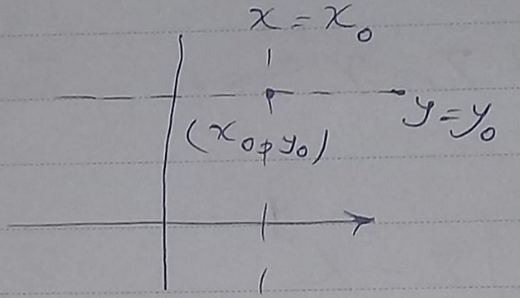
PAPCO

Subject
Date

مشتق توابع دو متغیره: تابع $z=f(x,y)$ در نقطه (x_0, y_0) مشتق پذیر است هرگاه

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \quad \underline{1}$$

موجود و متناهی باشد.



اکنون مقدار $\underline{1}$ را بر روی دو مسیر $x=x_0$ و $y=y_0$ بدست می آوریم:

$$y=y_0: \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} \quad \underline{2}$$

$$x=x_0: \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0} \quad \underline{3}$$

مقدار $\underline{2}$ را مشتق f نسبت به x می نامیم آن را با نمادهای $f_x(x_0,y_0)$ ، $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ ، $z_x(x_0,y_0)$ ، $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)$ نشان می دهند.

مقدار $\underline{3}$ را مشتق f نسبت به y می نامیم که آن را با نمادهای $f_y(x_0,y_0)$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ و $z_y(x_0,y_0)$ و $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)$ نشان می دهیم.

PAPCO

Subject
Date

ex) Z_x و Z_y را بدست آورید.

1) $Z = x^2y + y^3$ $\quad Z_x = 2xy \;,\; Z_y = x^2 + 3y^2$

2) $Z = x\sin y$ $\quad Z_x = \sin y \;,\; Z_y = x\cos y$

3) $Z = x^y$ $\quad Z_x = yx^{y-1} \;,\; Z_y = x^y \ln x$

یادآوری: $\frac{d}{dx}a^u = u'a^u \ln a$

مثال: مشتقات نسبی توابع زیر را نسبت به متغیرهای مستقل بدست آورید.

1) $w = xy^2 + z\sin^{-1}y + z^3$

$\frac{\partial w}{\partial x} = w_x = y^2 \;,\; \frac{\partial w}{\partial y} = w_y = 2yx + \frac{z}{\sqrt{1-y^2}} \;,\; \frac{\partial w}{\partial z} = w_z = \sin^{-1}y + 3z^2$

2) $Z = xy^5 + x\ln x + \tan^{-1}y$

$Z_x = y^5 + \ln x + 1 \;,\; Z_y = 5xy^4 + \frac{1}{1+y^2}$

مشتقات مراتب بالاتر: اگر در تابع $Z=f(x,y)$ مشتقات جزئی $f_x(x,y)$ و

PAPCO

Subject
Date

اگر $f_x(x,y)$ و $f_y(x,y)$ پیوسته باشند آنگاه می‌توان مشتقات مرتبه دوم را نیز بدست آورد که آن‌ها را با نمادهای زیر نشان می‌دهیم:

$\frac{\partial f_x}{\partial x} = f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ،

$\frac{\partial f_x}{\partial y} = f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ، $\frac{\partial f_y}{\partial y} = f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$\frac{\partial f_y}{\partial x} = f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ،

ex) اگر $f(x,y) = \frac{x}{y} + \ln x - \ln y$ نشان دهید: $A = x^2 f_{xx} + y^2 f_{yy} + 2xy f_{xy} = 0$

$f_x = \frac{1}{y} + \frac{1}{x}$ ، $f_y = -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y}$ ،

$f_{xx} = \frac{-1}{x^2}$ ، $f_{xy} = \frac{-1}{y^2}$ ، $f_{yy} = \frac{2x}{y^3} + \frac{1}{y^2}$

$A = x^2\left(\frac{-1}{x^2}\right) + y^2\left(\frac{2x}{y^3} + \frac{1}{y^2}\right) + 2xy\left(-\frac{1}{y^2}\right)$

$= -1 + \frac{2x}{y} + 1 - \frac{2x}{y} = 0$

ex) فرض کنید

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y^2}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) آیا f در مبدا پیوسته است؟

PAPCO

Subject
Date

2) $f_x(0,0)$ را بدست آورده و ضابطه f_x را بنویسید.

$1)\ f(0,0)=0 \quad , \quad (0,0)\in D_f$

از طرفی داریم:

$$\lim_{\to(0,0)} \frac{3x^2y^2}{x^4+y^4} \quad , \quad \xrightarrow{y=mx} \lim_{x\to 0} \frac{3m^2x^4}{x^4(1+m^4)}$$

$$f(1,1)=\frac{3}{2}$$

$$=\frac{3m^2}{1+m^4} \Rightarrow$$ f در مبدا پیوسته نیست

$$f(1,0)=0$$

$$2)\ f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$$

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^5y^2+6xy^6}{(x^4,y^4)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

تعریف: تابع $z=f(x,y)$ را در نقطه (x_0,y_0) مشتق پذیر گوییم هرگاه تابع های $f_x(x,y)$ و $f_y(x,y)$ نیز در (x_0,y_0) پیوسته باشند.

ex) در مثال بالا تابع f_x در مبدا پیوسته نیست پس f در مبدا مشتق پذیر نمی باشد.

P4PCO

Subject

Date

قاعده‌ی زنجیره‌ای: فرض کنید $w=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ و به‌ازای هر $1\leqslant i\leqslant n$

$\hookrightarrow x_i=g_i(y_1,\dots,y_m)$

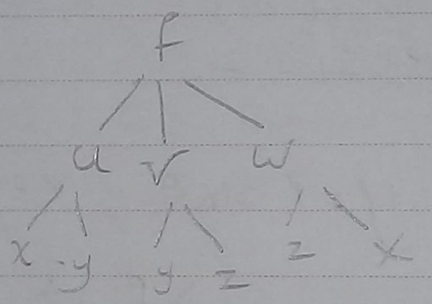
در این صورت به‌ازای هر $1\leqslant j\leqslant m$ داریم:

$$\frac{\partial w}{\partial y_j}=\frac{\partial f}{\partial y_j}=\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_j}+\frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_j}+\dots+\frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_j}$$

ex) فرض کنید $t=f(u,v,w)$ بطوریکه $u=x-y$ و $v=y-z$ و $w=z-x$

نشان دهید:

$$f_x+f_y+f_z=0$$



$$f_x=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}=f_u-f_w$$

$$f_y=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-f_u+f_v$$

$$f_z=\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}=-f_v+f_w$$

$$=f_u-f_w-f_u+f_v-f_v+f_w=0$$

ex) فرض کنید $z=yg(x^2-y^2)$ نشان دهید: $y^2z_x+xyz_y=xz$

PAPCO

Subject
Date

g → x, y

$Z = y\,g(u)$, $u = x^2 - y^2$ ، $Z_x = y \frac{\partial g}{\partial x}$

$Z_x = y \frac{\partial g}{\partial x} = y\left(\frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}\right) \rightarrow \boxed{Z_x = 2xy\,g_u}$ ($\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$)

$Z_y = g(u) + y \frac{\partial g}{\partial y} = g(u) + y\left(\frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ ($\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$)

$Z_y = g(u) - 2y^2 g_u$ ، $y^2 Z_x + xy Z_y = 2xy^3 g_u + xy\,g(u) - 2xy^3 g_u$

$= \underbrace{xy\,g(u)}_{Z} = xZ$

Ex) فرض کنید $y = r\sin\theta$, $x = r\cos\theta$, $Z = f(x, y)$

f → x, y ; x → r, θ ; y → r, θ

ثابت کنید: $\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$

$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$ ، $\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$

$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta)$

طرف چپ $= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\cos^2\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\sin^2\theta + 2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\cos\theta$

$+ \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 r^2\sin^2\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 r^2\cos^2\theta - 2r^2\sin\theta\cos\theta \times \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right]$

P4PCO

Subject
Date

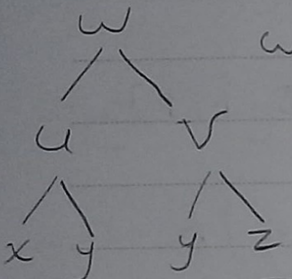
$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

ex) اگر $w=f\left(\frac{y-x}{xy},\frac{z-y}{yz}\right)$ نشان دهید:

$$x^2 w_x + y^2 w_y + z^2 w_z = 0$$

در واقع $\Leftarrow$ $u=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ ، $v=\frac{1}{y}-\frac{1}{z}$

قرار می‌دهیم $u=\frac{y-x}{xy}$ و $v=\frac{z-y}{yz}$ در نتیجه: $w=f(u,v)$



$$w_x=\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$w_x=\frac{\partial w}{\partial u}\left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

$$w_y=\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$w_y=\frac{\partial w}{\partial u}\left(\frac{1}{y^2}\right)+\frac{\partial w}{\partial v}\left(-\frac{1}{y^2}\right)$$

$$w_z=\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}\rightarrow w_z=\frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

تعریف: تابع $f(x,y,z)$ مفروض است. بردار گرادیان تابع f در نقطه (x_0,y_0,z_0) را با نمادهای $\vec{\nabla f}$ و یا $\overrightarrow{\text{grad}\,f}$ نشان داده و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{\nabla f}(x_0,y_0,z_0)=f_x(x_0,y_0,z_0)i+f_y(x_0,y_0,z_0)j+f_z(x_0,y_0,z_0)k$$

PAPCO

Subject
Date

ex) بردار گرادیان توابع زیر را در نقطه داده شده بدست آورید:

1) $f(x,y,z)=x^2y-zy^2+z^3$ $\quad A(1,1,1)$

$\overrightarrow{\nabla f(A)}=(2xy)i+(x^2-2zy)j+(-y^2+3z^2)k$

$=2i-j+2k$

2) $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2)-zy$ $\quad A(0,1,1)$

$\overrightarrow{\nabla f(A)}=\frac{2x}{x^2+y^2}i+\left(\frac{2y}{x^2+y^2}-z\right)j+(-y)k$

$=0i+j-k$

تعریف: به شکل توابع دو متغیره $z=f(x,y)$ رویه می گویند. در این درس شکل چند رویه ی درجه ی دوم با ضابطه ی $ax^2+by^2+az^2+a'x+b'y+c'z=d_1$ (d) را مورد بررسی قرار می دهیم. برای رسم این نوع رویه ها، ابتدا رویه را با صفحات $z=z_0$ برش می زنیم تا منحنی های $ax^2+by^2+a'x+b'y=d-c'z_0-c'z^2$ بدست آید. به منحنی های بدست آمده، منحنی های تراز می گویند. (توجه کنید که منحنی های تراز در صفحه ی $z=z_0$ واقع اند)

سپس تصویر رویه را بر روی صفحه ی yz بدست می آوریم. برای این منظور در معادله ی رویه $x=0$ را قرار می دهیم تا منحنی (سایه جسم) ←

$by^2+cz^2+b'y+c'z=d$ بدست آید.

مثال: رویه‌های زیر را رسم کنید.

1) $z=x^2+y^2$ از آن جایی که طرف راست همواره مثبت است پس $z \geq 0$.

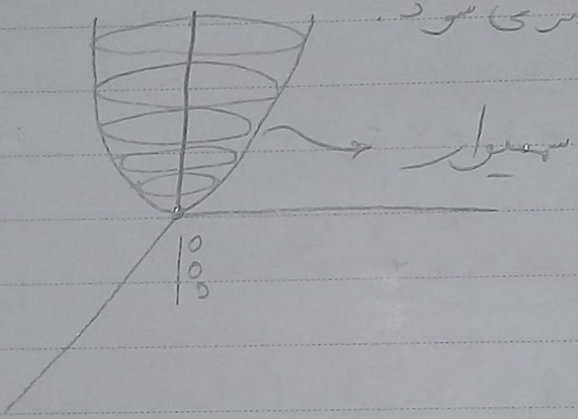
این رویه را با صفحات زیر برش می‌زنیم. واضح است که با بزرگ شدن مقادیر z، شعاع دایره نیز بزرگتر می‌شود.

$z=0: x^2+y^2=0 \rightarrow \begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}$ ،

$z=1: x^2+y^2=1$ ،

$z=2: x^2+y^2=2$ ،

⋮



$x=0 \rightarrow z=y^2 \rightarrow$ سهمی

2) $z=8-x^2-y^2$ $x^2+y^2=8-z \rightarrow 8-z \geq 0 \rightarrow z \leq 8$

$z=8 \rightarrow x^2+y^2=0 \rightarrow \begin{vmatrix}0\\0\\8\end{vmatrix}$

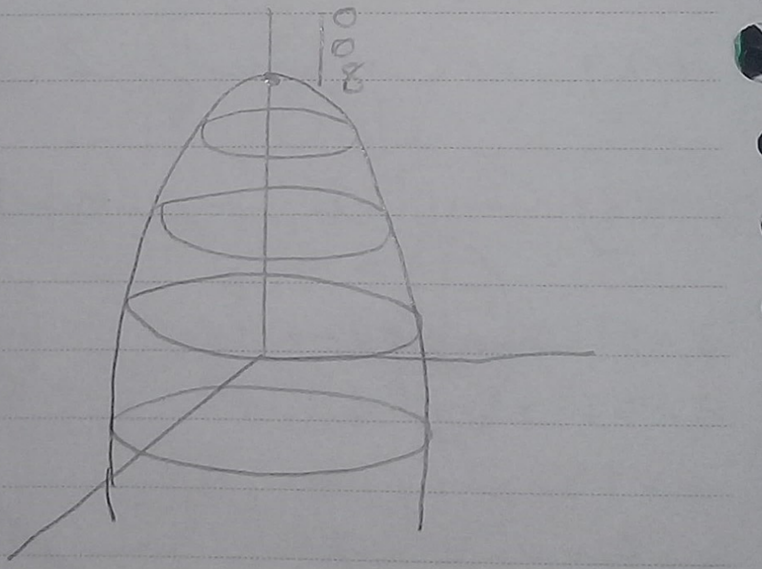
$z=7 \rightarrow x^2+y^2=1$

$z=6 \rightarrow x^2+y^2=2$

⋮

$z=0 \rightarrow x^2+y^2=8$

$z=-2 \rightarrow x^2+y^2=10$



$x=0 \rightarrow z=8-y^2$

3) $x^2+y^2-z^2=1$ → از آن جایی که طرفین تساوی همواره مثبت است

z می تواند از $-\infty$ تا $+\infty$ باشد. $x^2+y^2=1+z^2$

از آن جایی که توان z زوج است پس شکل رویه نسبت به صفحه xy متقارن است

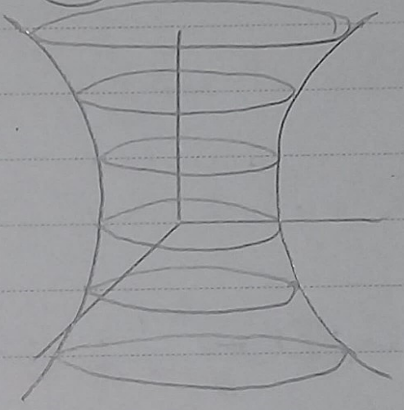
یعنی کافیست رویه را برای $z \geq 0$ رسم کرد و قرینه آن را در پایین صفحه xy بدست آوریم.

واضح است با بزرگ شدن z، شعاع دایره نیز بزرگتر می شود. $z=0 \to x^2+y^2=1$

$z=\pm1 \to x^2+y^2=2$

$z=\pm2 \to x^2+y^2=5$

$x=0 \to y^2-z^2=1$



هذلولیوار یکپارچه

4) $x^2+y^2-z^2=-1$ → $x^2+y^2=-1+z^2 \to z^2-1 \geq 0 \to z^2 \geq 1$

$z \geq 1$ یا $z \leq -1$. از آن جایی که توان z زوج است شکل نسبت به صفحه xy متقارن

پس کافیست رویه را برای z های بزرگتر مساوی یک رسم کرد و قرینه آن را نسبت به xy بدست آورد

$z=\pm1 : x^2+y^2=0 \to (0, 0, \pm1)$

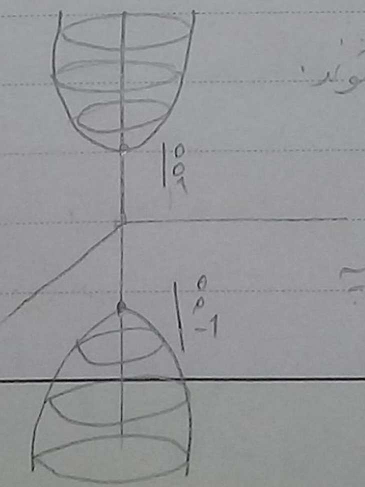
با بزرگ شدن z دایره بزرگتری می شوند.

$z=\pm2 : x^2+y^2=3$

$z=\pm3 : x^2+y^2=8$

$x=0 \to y^2-z^2=-1$

$z^2-y^2=1$



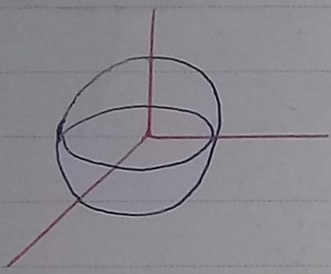
هذلولیوار دوپارچه

P4PCO

اکنون معادله و شکل چند رویه را که در این درس مورد استفاده قرار می‌گیرد رسم می‌کنیم.

1) $x^2+y^2+z^2=a^2$ کره‌ای به مرکز مبداء و به شعاع a

دقت کنید که کره شامل دو نیم‌کره $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ و $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ می‌باشد.



از طرفی $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2$ نیز

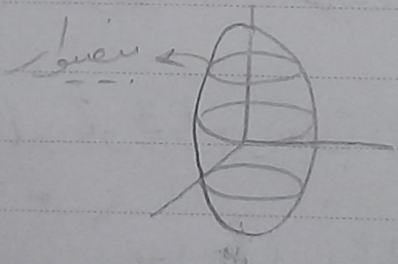
معادله کره‌ای به مرکز $\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$ و شعاع a است.

ex) مرکز و شعاع کره $x^2+y^2+z^2+2x-4z=0$ را تعیین کنید.

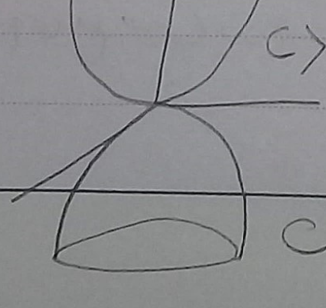
$x^2+2x+y^2+z^2-4z=0 \rightarrow x^2+2x+1-1+y^2+z^2-4z+4-4=0$

$(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=5$ کره‌ای به مرکز $\begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}$ و شعاع $\sqrt{5}$ است.

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ رویه‌ی فوق یک بیضوی به مرکز $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ است.

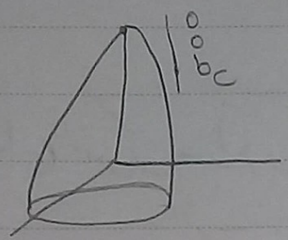


3) $\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

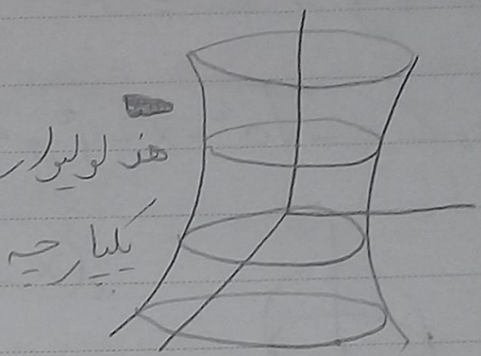


PAPCO

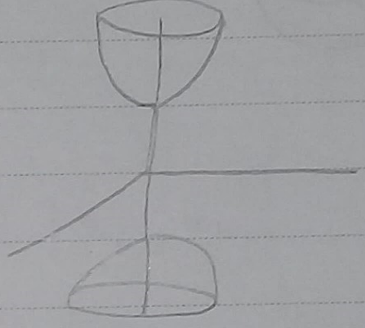
در حالت خاص $\frac{z}{c} = b - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ نیز یک سهمی است.



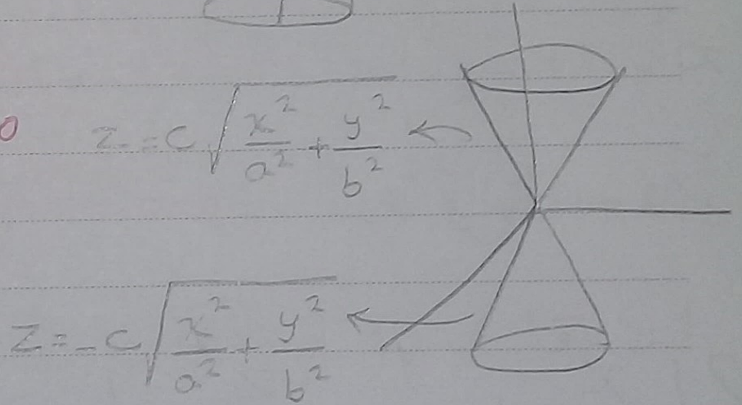
4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$



6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ $c>0$

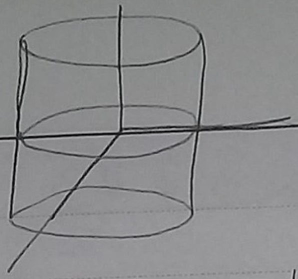


7) استوانه: به رویه‌ای $\underset{1}{f(x,y)=0}$ ، $\underset{2}{f(x,z)=0}$ و $\underset{3}{f(y,z)=0}$ در فضا استوانه گویند. برای رسم استوانه، ابتدا منحنی‌های 1 و 2 و 3 را به ترتیب در صفحات xy و xz و yz رسم می‌کنیم سپس در جهت محور z و y و x امتداد می‌دهیم.

Subject
Date

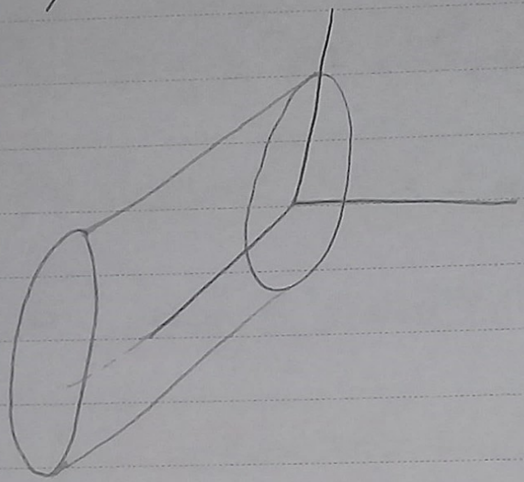
(ex

1) $x^2+y^2=4$



2) $y^2+3z^2=1$

$y^2+\dfrac{z^2}{\frac{1}{3}}=1$



فصل 4 : کاربرد مشتقات جزئی

تعریف: رویه‌ی $f(x,y,z)=0$ مفروض است. در هر نقطه $A\begin{vmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{vmatrix}$ واقع بر سطح رویه‌ی f می‌توان برداری به نام بردار گرادیان را بر رویه عمود کرد. این بردار را با نماد $\vec{\nabla f}$ نمایش می‌دهیم.

$$\vec{\nabla f}=f_x(x_0,y_0,z_0)i+f_y(x_0,y_0,z_0)j+f_z(x_0,y_0,z_0)k$$

بردار گرادیان f عبارت است از بردار هادی خط عمود بر رویه و بردار نرمال صفحه مماس بر رویه در نقطه A.

ex) معادله‌ی صفحه مماس و خط عمود بر رویه‌های زیر را در نقطه داده شده بنویسید.

1) $x^2+y^2-z^2=1 \quad A(1,1,1) \quad f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-1=0$

$\vec{\nabla f}=2xi+2yj-2zk \overset{A}{=} 2i+2j-2k$

صفحه مماس بر رویه: $2(x-1)+2(y-1)-2(z-1)=0$

خط عمود بر رویه: $\begin{cases}x=2t+1\\y=2t+1\\z=-2t+1\end{cases}$

Subject
Date

2) $ye^{-x^2}\sin z=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad A\left|\begin{matrix}0\\1\\\frac{\pi}{3}\end{matrix}\right.$

$f(x,y,z)=ye^{-x^2}\sin z-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$

$\vec{\nabla f}=(-2xye^{-x^2}\sin z)i+(e^{-x^2}\sin z)j+(ye^{-x^2}\cos z)k$

$\vec{\nabla f}(A)=0i+\frac{\sqrt{3}}{2}j+\frac{1}{2}k$

صفحه مماس بر رویه: $0(x-0)+\frac{\sqrt{3}}{2}(y-1)+\frac{1}{2}(z-\frac{\pi}{3})=0$

خط عمود بر رویه
$$\begin{cases}x=0t+0\\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t+1\\ z=\frac{1}{2}t+\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

اکسترمم نسبی تابع $Z=f(x,y)$:

تعریف: نقطه $Z_0=(x_0,y_0)$ را نقطه بحرانی تابع $Z=f(x,y)$ می‌نامیم هرگاه

$\begin{cases}f_x(x_0,y_0)=0\\ f_y(x_0,y_0)=0\end{cases}$ یا f_x یا f_y در این نقطه تعریف نشده باشد.

تعریف: فرض کنید $Z_0=(x_0,y_0)$ نقطه بحرانی تابع $Z=f(x,y)$ باشد. در

این صورت تابع f در این نقطه دارای Max (Min) نسبی است هرگاه همسایگی از

نقطه Z_0 وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر (x,y) در این همسایگی

PAPCO

Subject
Date

$(f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$ / $f(x,y) \leq f(x_0,y_0))$.

قضیه: فرض کنید $f_x(x_0,y_0)$ و $f_y(x_0,y_0)$ وجود داشته باشد (پیوسته باشد) اگر f در این نقطه دارای اکسترمم نسبی باشد آنگاه: $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$

قضیه: فرض کنید $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$ در این صورت f در این نقطه دارای Max نسبی است هرگاه $\Delta(x_0,y_0) > 0$ و $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$.

f در این نقطه دارای Min نسبی است هرگاه $\Delta(x_0,y_0) > 0$ و $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$.

اگر $\Delta(x_0,y_0) < 0$ آنگاه این نقطه زینی می باشد که در آن $\Delta = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$

تعریف: نقطه $Z_0 = (x_0, y_0)$ را نقطه زینی تابع $Z = f(x,y)$ می نامند هرگاه به ازای هر همسایگی از آن نقاط $Z_1 = (x_1, y_1)$ و $Z_2 = (x_2, y_2)$ وجود داشته باشد؛ طوری که $f(x_0,y_0) > f(x_1,y_1)$ و $f(x_0,y_0) < f(x_2,y_2)$

ex) نقاط اکسترمم و زینی توابع زیر را در صورت وجود بدست آورید.

1) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \rightarrow y = x^2 \xrightarrow{(2)} x^4 - x = 0 \rightarrow x(x^3 - 1) = 0$$

$$x = 0, 1$$

بنابراین دو نقطه $A\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}$ بدست می آید.

PAPCO

Subject
Date

$\Delta = (6x)(6y) - (-3)^2$ ، $\Delta(A) = -9 < 0$ نقطه A زینی

$\Delta(B) = 36 - 9 = 27 > 0 \rightarrow f_{xx}(B) = 6 > 0$ f در B دارای min نسبی است

$\min f = f(1,1) = -1$

2) نشان دهید (0,0) و (1,1) نقاط بحرانی $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ هستند سپس با استفاده از آزمون مشتق دوم آن ها را رده بندی کنید.

$$\begin{cases} f_x = 0 & 6x^2 - 6y = 0 \quad (1) \\ f_y = 0 & -6x + 6y = 0 \rightarrow y = x \end{cases}$$

$\xrightarrow{(1)} x^2 - x = 0 \rightarrow x(x-1) = 0$

$x = 0, 1$ $A(0,0)$ ، $B(1,1)$

$\Delta = (12x)(6) - (-6)^2 = ?$

$\Delta(A) = -36 < 0$ نقطه A زینی ،

$$\begin{cases} \Delta(B) = 72 - 36 = 36 > 0 \\ f_{xx}(B) = 12 > 0 \end{cases}$$

f در نقطه B دارای min نسبی است ،

$\min f = f(1,1) = -1$

3) $f(x,y) = (x^2 - 2x)(y^2 - 2y)$

$$\begin{cases} (1) & (2x-2)(y^2-2y) = 0 \\ (2) & (x^2-2x)(2y-2) = 0 \end{cases}$$

$(1) \rightarrow x = 1$ یا $y = 0, 2$

$x = 1 \xrightarrow{(2)} -(+2y-2) = 0 \rightarrow y = 1$ $A\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}$

PAPCO

$y = 0 \xrightarrow{(2)} -2(x^2 - 2x) = 0 \rightarrow x = 0, 2$ $B\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$ $C\begin{vmatrix}2\\0\end{vmatrix}$

Subject
Date

$y=2 \xrightarrow{②} 2(x^2-2x)=0 \longrightarrow x=0,2 \ , \ B'\begin{vmatrix}0\\2\end{vmatrix} \ , \ C'\begin{vmatrix}2\\2\end{vmatrix}$

$\Delta=\left[2(y^2-2y)\right]\left[2(x^2-2x)\right]-\left[(2x-2)(2y-2)\right]^2$

$\Delta(A)=4>0$ $f_{xx}=-2<0$ f در A دارای max نسبی است	$\Delta(B)=-16<0$ نقطه B زینی است	$\Delta(C)=-16<0$ نقطه C زینی است

$\Delta(B')=-16<0$ نقطه B' زینی است	$\Delta(C')=-16<0$ نقطه C' زینی است

مشتق جهتی تابع: مشتق تابع $f(x,y,z)$ در جهت بردار یکه $\vec{u}=ai+bj+ck$ در نقطه $A(x_0,y_0,z_0)$ را با نماد $D_u f(A)$ نشان می‌دهند که عبارت است از:

$$D_u f(A)=\overrightarrow{\nabla f}(A)\cdot\vec{u}$$

ex) مشتق تابع $f(x,y,z)=x^3-xy^2-z$ را در نقطه $A(1,1,0)$، در جهت بردار $\vec{u}=2i-3j+6k$ بدست آورید.

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\frac{2}{7}i-\frac{3}{7}j+\frac{6}{7}k$$

$$\overrightarrow{\nabla f}=f_x i+f_y j+f_z k=(3x^2-y^2)i+(-2xy)j+(-1)k$$

$$\overrightarrow{\nabla f}(A)=2i-2j-k \ , \ D_u f(A)=\frac{4}{7}+\frac{6}{7}-\frac{6}{7}=\frac{4}{7}$$

P4PCO

Subject
Date

نکته: از اینکه $D_u f = \vec{\nabla f} \cdot \vec{u} = |\vec{\nabla f}| \cos\theta$ که در آن θ زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{\nabla f}$ و $\vec{u}$ است نتیجه می‌گیریم به ازای هر بردار یکه u،

$-|\vec{\nabla f}| \leq D_u f \leq |\vec{\nabla f}|$ به عبارت دیگر به ازای $\vec{u} = \frac{\vec{\nabla f}}{|\vec{\nabla f}|}$ بیشترین

مشتق جهتی f و به ازای $\vec{u} = -\frac{\vec{\nabla f}}{|\nabla f|}$ کمترین مشتق جهتی f وجود دارد.

Ex) مشتق جهتی (سویی) تابع $f(x,y,z) = x e^{y^2 z}$ را در نقطه $(2,1,0)$ B در

جهت بردار $\vec{A} = i - j - \sqrt{2} k$ بدست آورید. $\vec{\nabla f} = e^{y^2 z} i + 2xyz e^{y^2 z} j + xy^2 e^{y^2 z} k$

$\vec{\nabla f}(B) = i + 0j + 2k$ ، $\vec{u} = \frac{A}{|\vec{A}|} = \frac{i}{2} - \frac{j}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} k$

$D_u f(B) = \frac{1}{2} + 0 + \sqrt{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{2}$

Ex) اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$ را تعیین کنید.

$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \\ 3y^2 - 12 = 0 \rightarrow y = \pm 2 \end{cases}$ $A\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$ ، $A'\begin{vmatrix}1\\-2\end{vmatrix}$ ، $B\begin{vmatrix}-1\\2\end{vmatrix}$ ، $B'\begin{vmatrix}-1\\-2\end{vmatrix}$

$\begin{cases} \Delta(A) = 72 > 0 \\ f_{xx} = 6 \end{cases}$ نقطه A min

$\Delta = (6x)(6y) - (0)^2$ ، $\Delta(A') = \Delta(B) = -72 < 0$ B, A' نقطه زینی

$\begin{cases} \Delta(B') = 72 > 0 \\ f_{xx} = -6 < 0 \end{cases}$ نقطه B' Max

P4PCO

Subject
Date

یادآوری: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x_0)^n$

بسط تیلور تابع $z=f(x,y)$.

قضیه: بسط تیلور تابع $z=f(x,y)$ حول نقطه (x_0 , y_0) با شرط وجود مشتقات جزئی و با فرض $h=x-x_0$ و $k=y-y_0$ عبارت است:

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)$$

$$=f(x_0,y_0)+hf_x(x_0,y_0)+kf_y(x_0,y_0)+\frac{1}{2}\left(h^2f_{xx}(x_0,y_0)+k^2f_{yy}(x_0,y_0)+2hkf_{xy}(x_0,y_0)\right)+\dots$$

بسط مک لورن تابع همان بسط تیلور تابع حول نقطه $(0,0)$ می باشد.

ex) برای تابع $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ بسط تیلور تا درجه دوم را در نقطه $A(0,1)$ بنویسید.

$$f_x=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=0 \quad , \quad f_y=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=1$$

$$f_{xx}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=1 \quad , \quad f_{xy}=\frac{\frac{-2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\times x}{x^2+y^2}=0$$

$$f_{yy}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{2y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=0 \quad , \quad f(x,y)=1+x\times 0+(y-1)1+\frac{1}{2}\left(x^2\times 1\right.$$

$$\left.+(y-1)^2\times 0+2x(y-1)\times 0\right)+\dots=1+y-1+\frac{x^2}{2}$$

$$\simeq y+\frac{x^2}{2}$$

PAPCO

Subject
Date

$$\sqrt{(0,01)^2+(0,97)^2} \simeq 0/97 + \frac{(0/0001)}{2}$$ مطلوب است.

$$\simeq 0/97 + 0/00005 \simeq 0/97005$$

انتگرال دوگانه: فرض کنید تابع $Z = f(x, y)$ به ازای هر واقع در ناحیه بسته D ($D \subseteq D_f$) تعریف شده باشد.

برای تعیین حجم فضای محصور به رویه $Z = f(x, y)$ و ناحیه D، ابتدا ناحیه D را به مستطیل هایی به ابعاد Δx و Δy تقسیم می کنیم در داخل هر مستطیل نقطه دلخواه (x_i, y_i) را در نظر گرفته و مکعب هایی با ارتفاع $f(x_i, y_i)$ می سازیم در این صورت حجم فضای مورد نظر عبارت است از:

$$V = \lim_{\substack{n \to \infty \\ (\Delta x, \Delta y) \to (0,0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta x \Delta y \qquad 1$$

مقدار 1 را با نماد $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$ نشان می دهیم و آن را انتگرال دوگانه تابع f روی ناحیه D می نامیم.

نمادگذاری: $\Delta x \Delta y = \Delta y \Delta x = \Delta A$

و در نتیجه می توان قرار داد $dx\,dy = dy\,dx = dA$

Subject
Date

نکته: اگر
$$D=\{(x,y)\,|\,g_1(x)\leq y\leq g_2(x)\,;\,a\leq x\leq b\}$$
$$=\{(x,y)\,|\,k_1(y)\leq x\leq k_2(y)\,,\,c\leq y\leq d\}$$

دراین صورت:
$$\iint_D f(x,y)\,dA=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx=\int_c^d\int_{k_1(y)}^{k_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

و آن را انتگرال دوگانه تابع f روی ناحیه D گوییم.

خواص انتگرال دو متغیره:

1) $\iint_D cf(x,y)+g(x,y)\,dA=c\iint_D f(x,y)\,dA+\iint_D g(x,y)\,dA$

2) $\iint_{D_1\cup D_2} f(x,y)\,dA=\iint_{D_1} f(x,y)\,dA+\iint_{D_2} f(x,y)\,dA$

3) هرگاه D ناحیه‌ی مستطیل شکل محصور به خطوط $a\leq y\leq b$, $c\leq x\leq d$ باشد
آنگاه:
$$\iint_D f(x,y)\,dA=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dy\,dx=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dx\,dy$$

4) هرگاه D ناحیه مستطیل شکل محصور به خطوط $a\leq y\leq b$, $c\leq x\leq d$ باشد و
$f(x,y)=g(x)k(y)$ آنگاه:

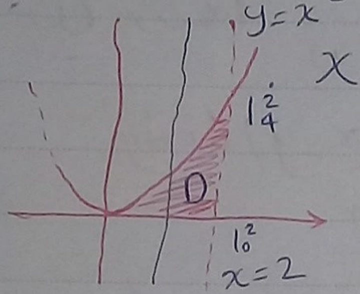
PAPCO

Subject
Date

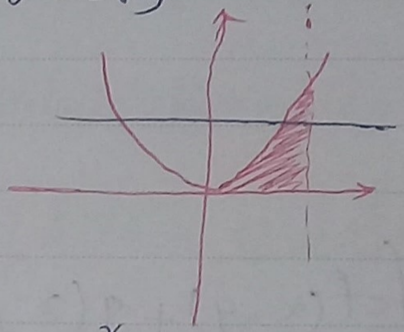
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d g(x)\,dx \times \int_a^b k(y)\,dy$$

ex) با توجه به تعریف D حدود انتگرال دوگانه‌ی $\iint_D f(x,y)\,dy\,dx$ و $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ را بنویسید.

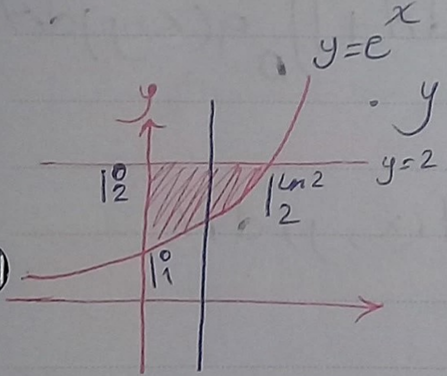
1) D ناحیه محصور به $y = x^2$ و محور x ها و خط $x = 2$.

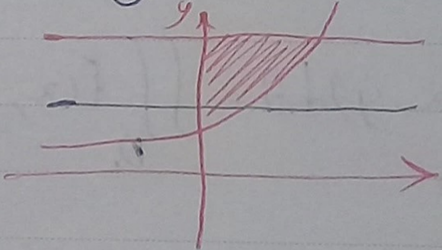


$$I = \int_0^2 \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^4 \int_{x=\sqrt{y}}^{x=2} f(x,y)\,dx\,dy$$



2) D ناحیه محصور به $y = e^x$ و محور y ها و خط $y = 2$.

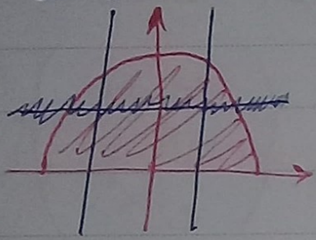




$$I = \int_0^{\ln 2} \int_{e^x}^{2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_1^2 \int_{x=0}^{x=\ln y} f(x,y)\,dx\,dy$$

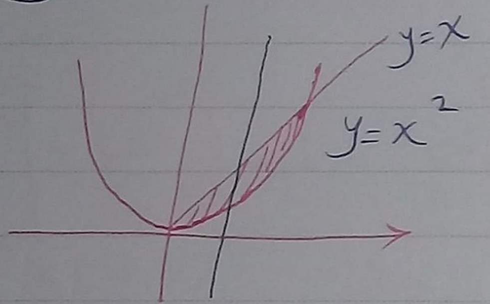
Subject
Date

3 D ناحیه‌ی محصور به نیم دایره‌ی $x^2+y^2=1$ واقع در بالای محور x و محور x.



$$I=\int_{-1}^{+1}\int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

4 اگر D ناحیه محصور به $y=x$ و $y=x^2$ و محور x باشد مقدار انتگرال $\iint_D (x+y)\,dA$ را بدست آورید.



$$I=\int_0^1\int_{y=x^2}^{y=x}(x+y)\,dy\,dx=\int_0^1\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{x}dx$$

$$=\int_0^1\left(x^2+\frac{x^2}{2}\right)-\left(x^3+\frac{x^4}{2}\right)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{10}\Big]_0^1$$

$$I=\int_0^1\int_{x=y}^{x=\sqrt{y}}(x+y)\,dx\,dy=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}+xy\right)_y^{\sqrt{y}}dy=$$

از طرفی داریم:

$$=\int_0^1\left(\frac{y}{2}+y^{\frac{3}{2}}\right)-\left(\frac{y^2}{2}+y^2\right)dy=\left[\frac{y^2}{4}+\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}-\frac{y^3}{2}\right]_0^1$$

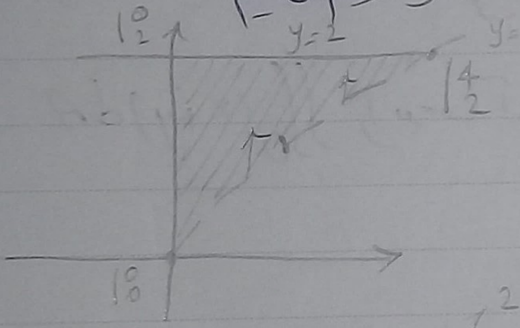
PAPCO

Subject
Date

5) مقدار انتگرال $I=\int_0^4\int_{\sqrt{x}}^2 \frac{\cos y}{y^2}\,dy\,dx$ را بدست آورید.

نکته: تابع $\frac{\cos y}{y^2}$ نسبت به y دارای تابع اولیه نمی باشد پس مقدار انتگرال فوق با تعویض ترتیب انتگرال گیری بدست می آید. برای این منظور ابتدا از روی حدود انتگرال گیری؛ شکل ناحیه D را رسم می کنیم.

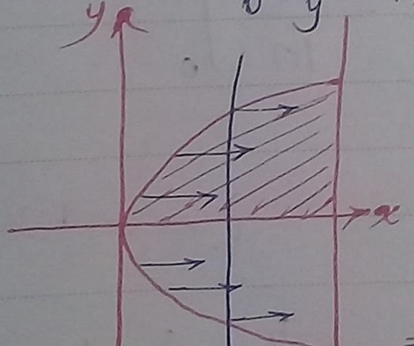
$$\frac{\sin^n ax,\ \cos^n ax,\ e^{ax}}{x^m}$$ تابع اولیه ندارند.



$$I=\int_0^2\int_0^{y^2}\frac{\cos y}{y^2}\,dx\,dy=\int_0^2\left.\frac{\cos y}{y^2}x\right]_0^{y^2}dy$$

$$=\int_0^2\cos y\,dy=\sin y\Big]_0^2=\sin 2$$

6) با تعویض ترتیب انتگرال گیری مقدار $I=\int_0^1\int_{y^2}^1\frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx\,dy$ را بدست آورید.



$$I=\int_0^1\int_0^{\sqrt{x}}\frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1\left[\frac{e^x}{\sqrt{x}}y\right]_0^{\sqrt{x}}dx=\int_0^1 e^x\,dx=e^x\Big]_0^1=e-1$$

Subject

Date

تغییر متغیر در انتگرال دوگانه: برای محاسبه‌ی $I = \iint_D f(x,y)\,dA$ می‌توان از تغییر متغیر به صورت زیر استفاده کرد:

$$I = \iint_{D'} f(g(u,v), k(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv$$

که در آن $J(u,v)$ را ژاکوبی u، v برحسب x و y می‌نامند. به طوری که:

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}}$$

و D' نیز ناحیه انتگرال‌گیری نسبت به متغیرهای u و v می‌باشد.

ex) با تغییر متغیر مناسب مقدار انتگرال‌های زیر را بدست آورید:

1) $I = \iint_D \frac{1}{y}\,dy\,dx$ ناحیه محصور به $y^3 = x^2$ و $y^3 = 4x^2$ و D

نکته: هرگاه ناحیه D شامل دو منحنی $f(x,y) = a g(x,y)$ و $y = 2x$ و $y = x$ و $f(x,y) = b g(x,y)$ باشد از تغییر متغیر $u = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ استفاده می‌کنیم

PAPCO

Subject
Date

واگر D شامل دو منحنی $f(x,y)=g(x,y)+a$, $f(x,y)=g(x,y)+b$

باشد از تغییر متغیر $u=f(x,y)-g(x,y)$ استفاده می‌کنیم.

با توجه به نکته فوق قرار می‌دهیم: $u=\frac{y^3}{x^2}$ و $v=\frac{y}{x}$. در نتیجه

$$j(u,v)=\frac{1}{\begin{vmatrix}\frac{-2y^3}{x^3} & \frac{3y^2}{x^2}\\ \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{x}\end{vmatrix}}=\frac{1}{\frac{-2y^3}{x^4}+\frac{3y^3}{x^4}}=\frac{x^4}{y^3}$$

$$I=\iint_{D'}\frac{1}{y}\times\frac{x^4}{y^3}\,du\,dv=\iint_{D'}\frac{1}{v^4}\,du\,dv$$

برای تعیین D' از مرزهای ناحیه‌ی D استفاده می‌کنیم:

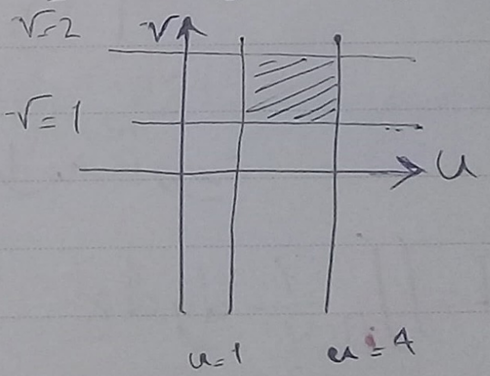
$y^3=4x^2$

$y^3=x^2$

$y=2x$

$y=x$

$$\Longrightarrow D':\begin{cases}u=4\\ u=1\\ v=2\\ v=1\end{cases}$$



Subject
Date

$$I = \int_1^2\int_1^4 \frac{1}{v^4}\,du\,dv = \int_1^2 \frac{1}{v^4}\,dv \times \int_1^4 du = \left[\frac{-1}{3v^3}\right]_1^2 \times \left[u\right]_1^4$$

2) $I = \iint_D 8xy\,dx\,dy$ ، D ناحیه محصور به $x^2-y^2=1$,
$x^2+y^2=4$, $x^2-y^2=4$ و $x^2+y^2=9$

قرار می‌دهیم $u = x^2-y^2$, $v = x^2+y^2$

$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2x & 2y \end{vmatrix}} = \frac{1}{8xy}$$

$$I = \iint_{D'} 8xy \times \frac{1}{8xy}\,du\,dv$$ که در آن $4 \leq v \leq 9$, $1 \leq u \leq 4$:

$$I = \int_1^4 du \times \int_4^9 dv = 15$$

3) $I = \iint_D \sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}\,dA$ ، D ناحیه محصور به $y=4x$, $y=x$, $xy=1$, $xy=9$.

قرار می‌دهیم $\frac{y}{x} = u$, $xy = v$ پس:

$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{vmatrix}} = \frac{1}{-\frac{2y}{x}} = -\frac{1}{2}\frac{x}{y}$$

PAPCO

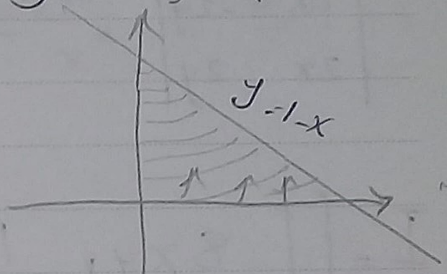
Subject
Date

$$I=\iint_{D'}\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{yx}\right)\left(\frac{x}{2y}\right)du\,dv$$

$$=\iint_{D'}(\sqrt{u}+\sqrt{v})\frac{1}{2u}\,du\,dv=\frac{1}{2}\int_1^9\int_1^4\frac{1}{\sqrt{u}}+\frac{\sqrt{v}}{u}\,du\,dv$$

$$I=\frac{1}{2}\int_1^9\left[2\sqrt{u}+\sqrt{v}\ln u\right]_1^4dv=\frac{1}{2}\int_1^9 2+\sqrt{v}\ln 4\,dv$$

$$=\frac{1}{2}\left(2v+\frac{2\ln 4}{3}v^{\frac{3}{2}}\right)_1^9$$

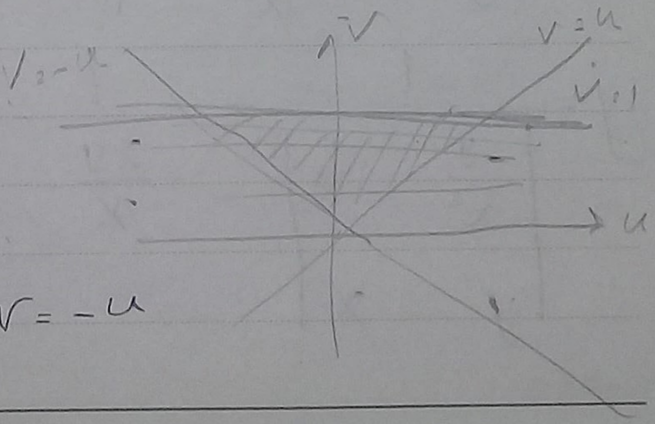


4) $I=\int_0^1\int_0^{1-x}\cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dy\,dx$

نکته: هرگاه D شامل منحنی‌های دو به دو از یک خانواده باشد و تابع داخل انتگرال به صورت $f(ax+by, a'x+b'y)$ باشد آنگاه تغییر می‌دهیم $ax+by=u$ و $a'x+b'y=v$.

در این ex تغییر می‌دهیم $u=x-y$ و $v=x+y$ پس:

$$J=\frac{1}{\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}}=\frac{1}{2}\Rightarrow I=\frac{1}{2}\iint\cos\left(\frac{u}{v}\right)du\,dv$$



$y+x=1\rightarrow v=1$

$y=0\rightarrow\frac{v-u}{2}=0\rightarrow v=u$

$x=0\rightarrow\frac{v+u}{2}=0\rightarrow v=-u$

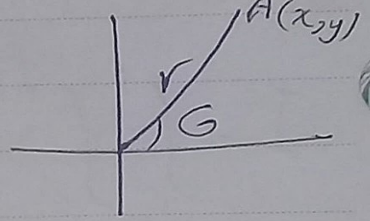
PAPCO

ادامه حل

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1\int_{-v}^{v}\cos\left(\frac{u}{v}\right)du\,dv=\frac{1}{2}\int_0^1 v\sin\left(\frac{u}{v}\right)\Big]_{-v}^{v}dv=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 2v\sin 1\,dv=\frac{\sin 1}{2}$$

تغییر متغیر قطبی: به هر نقطه‌ی (x,y) در صفحه می‌توان مقادیر r و θ را نسبت داد



به طوری که $r=|OA|=\sqrt{x^2+y^2}$ و θ زاویه‌ای است که پاره خط

OA با جهت مثبت محور xها می‌سازد از طرفی داریم:

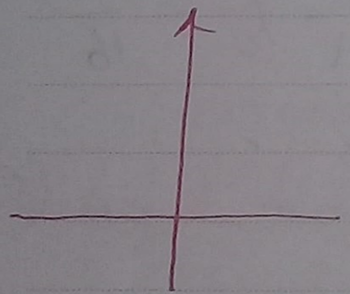
$\sin\theta=\frac{y}{r}$ و $\cos\theta=\frac{x}{r}$ در نتیجه $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$

را تغییر متغیر قطبی گویند. در نتیجه:

$$j(r,\theta)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r$$

پس:

$$\iint_D f(x,y)\,dy\,dx=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$



ex) ضابطه منحنی‌های زیر را در مختصات قطبی بنویسید:

$1)\ y=x^2 \rightarrow r\sin\theta=r^2\cos^2\theta$

$\hookrightarrow r=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$

PAPCO

Subject
Date

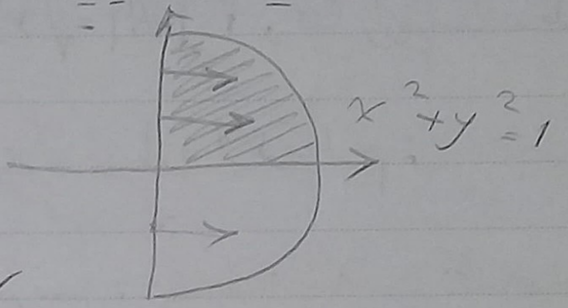
2) $x^2+y^2=4 \rightarrow r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 4 \rightarrow r=2$

3) $(x-a)^2+y^2=a^2 \rightarrow x^2+a^2-2ax+y^2=a^2 \rightarrow$

$r^2-2ar\cos\theta=0 \rightarrow r=2a\cos\theta$

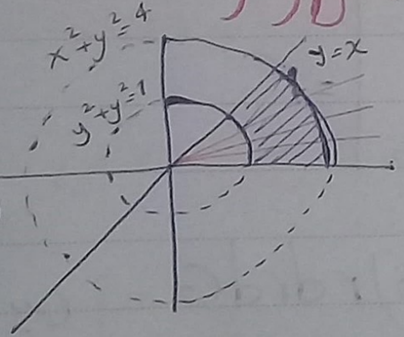
Ex) مقدار انتگرال های زیر را با تغییر متغیر قطبی بدست آورید:

$$I=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$



$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{r=1}\frac{r\,dr\,d\theta}{r}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 dr$$

2) $I=\iint_D (x^2+y^2)\,dy\,dx$ ، D ناحیه محصور بین $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ و محور x ها و خط $y=x$



$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{r=1}^{r=2} r^3\,dr\,d\theta$$ (واقع در ربع اول)

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta \times \int_0^2 r^3\,dr=\frac{\pi}{4}\left(\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^2=\frac{\pi}{16}$$

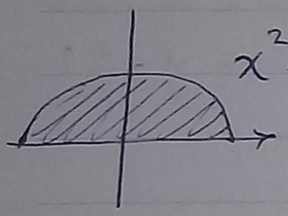
3) $I=\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dA$ ، Ex) D ناحیه محصور به دوایر

$x^2+y^2=4$ و $x^2+y^2=1$

$$I=\int_0^{2\pi}\int_1^2 \frac{r\sin\theta}{r}\, r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta \int_1^2 r\,dr =$$

$$(+\sin\theta)\Big|_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}\right)\Big|_1^2 = 0$$

ex! مقدار انتگرال $I=\iint_D \sin(x^2+y^2)\,dy\,dx$ ، D ناحیه محصور نیم دایره ای



$x^2+y^2=1$

حل $x^2+y^2=1$

$$I=\int_0^{\pi}\int_{r=0}^{r=1}\sin(r^2)\, r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi} d\theta \times \int_0^1 r\sin r^2\, dr =$$

$$=\pi\left(-\frac{1}{2}\cos r^2\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}(\cos 1 - 1)$$

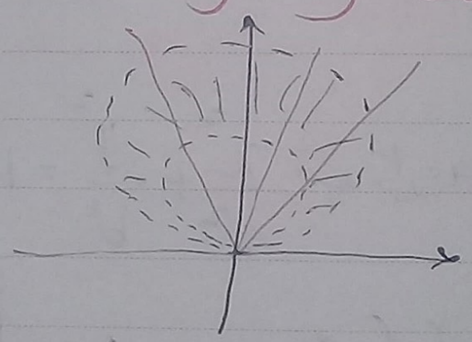
2) $I=\iint_D (x^2+y^2)\,dA$ که در آن D درون $x^2+y^2=4y$ و بیرون $x^2+y^2=2y$ است.

$$x^2+y^2=4y \rightarrow x^2+y^2-4y+4-4=0$$

$r=4\sin\theta \Leftarrow$

$$\Rightarrow x^2+(y-2)^2=4 \longrightarrow r=2\sin\theta$$

$$x^2+y^2=2y \rightarrow x^2+(y-1)^2=1$$



$$I=\int_0^{\pi}\int_{r=2\sin\theta}^{r=4\sin\theta} r^3\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} d\theta = \int_0^{\pi} 64\sin^4\theta - 4\sin^4\theta\, d\theta$$

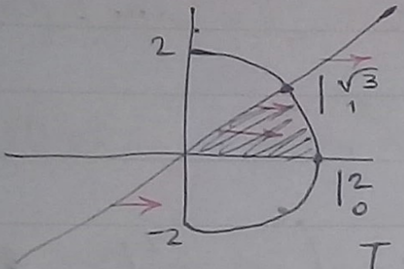
Subject
Date

$$= 60\int_0^{\pi} \sin^4\theta \, d\theta = 60\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

$$= \frac{45\pi}{2}$$

$$= 15\int_0^{\pi}(1+\cos^2 2\theta - 2\cos 2\theta)\,d\theta = 15\left(\frac{3}{2}\theta + \frac{1}{8}\sin 4\theta - \sin 2\theta\right)_0^{\pi}$$

3) انتگرال $I = \int_0^1\int_{\sqrt{3}y}^{\sqrt{4-y^2}} \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy$ را با استفاده از تغییر متغیر قطبی محاسبه کنید.



$$\sqrt{3}y = \sqrt{4-y^2} \to 3y^2 = 4-y^2 \Rightarrow y = \pm 1$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_{r=0}^{r=2} (\ln r^2)\, r\,dr\,d\theta$$

$\ln r = u \to \frac{dr}{r} = du \quad r\,dr = dv \to \frac{r^2}{2} = v$

$$\Rightarrow I = \frac{2\pi}{3}\int_0^2 r\ln r\,dr = \frac{2\pi}{3}\left[\frac{r^2}{2}\ln r - \frac{r^2}{4}\right]_0^2$$

4) مقدار انتگرال $I = \iint e^{x^2+3y^2}\,dy\,dx$ را بدست آورید.

$$x^2+3y^2 \leq 1$$

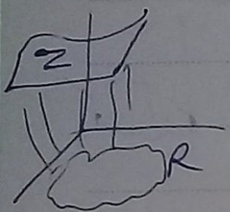
نکته: هرگاه در انتگرال دوگانه ناحیه‌ی انتگرال یعنی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ باشد قرار دهیم:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 f(ar\cos\theta, br\sin\theta)\,ab\,r\,dr\,d\theta$$

در این مثال قرار می‌دهیم: $x = r\cos\theta$ و $y = \frac{\sqrt{3}}{3}r\sin\theta$

Subject
Date

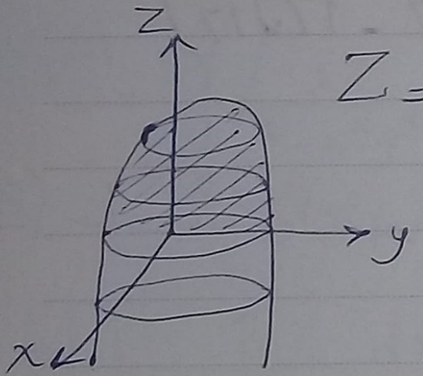
$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{r^2}\frac{\sqrt3}{3}\, r\,dr\,d\theta = 2\pi \times \frac{\sqrt3}{3}\times\frac12 e^{r^2}\Big]_0^1=\frac{\pi\sqrt3}{3}(e-1)$$



تعیین مساحت رویه: مساحت رویه $Z=g(x,y)$ واقع بر ناحیه R از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$S=\iint_R \sqrt{g_x^2+g_y^2+1}\,dy\,dx$$

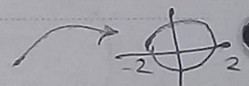
Ex 1) مساحت بخشی از رویه‌ی $Z=4-x^2-y^2$ را بدست آورید که توسط صفحه $Z=0$ جدا شده.



$$Z=4-x^2-y^2=g(x,y)$$

از طرفی R سایه سطح رویه بر روی زمین می‌باشد.

$$R:\begin{cases} Z=4-x^2-y^2 \\ Z=0\end{cases} \quad , R: x^2+y^2=4$$



$$S=\iint\sqrt{(-2x)^2+(-2y)^2+1}\,dy\,dx$$

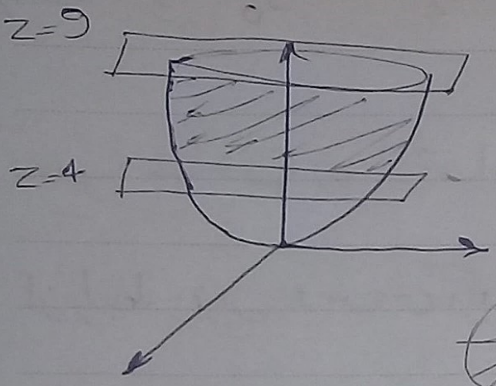
$R: x^2+y^2\leq 4$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2\sqrt{4r^2+1}\,r\,dr\,d\theta=2\pi\times\frac18\times\frac23(4r^2+1)^{\frac32}\Big]_0^2$$

$$=\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1)$$

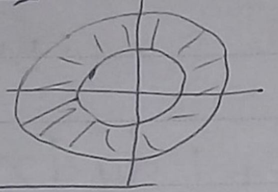
PAPCO

2) مساحت بخشی از رویه‌ی $Z=x^2+y^2$ که بین صفحات $Z=4$ و $Z=9$ واقع است.



$$Z=x^2+y^2=g(x,y)$$

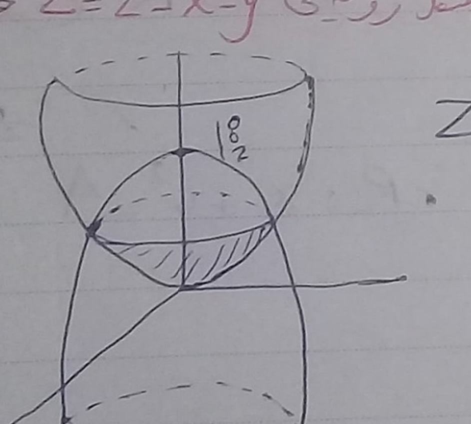
که در آن R ناحیه $4\leqslant x^2+y^2\leqslant 9$



$$S=\iint_R \sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dy\,dx=\int_0^{2\pi}\int_{r=2}^{r=3}\sqrt{4r^2+1}\,r\,dr\,d\theta$$

$$=2\pi\left[\frac{1}{8}(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}\times\frac{2}{3}\right]_2^3=\frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37}-17\sqrt{17}\right)$$

3) مساحت بخشی از سهمی‌وار $Z=x^2+y^2$ که توسط رویه‌ی $Z=2-x^2-y^2$ جدا شده



$$Z=x^2+y^2=g(x,y)$$

از طرفی R عبارت است از محل تلاقی دو رویه‌ی $Z=x^2+y^2$ و $Z=2-x^2-y^2$ یعنی:

$$R:\begin{cases}Z=x^2+y^2\\ Z=2-x^2-y^2\end{cases}\rightarrow R=x^2+y^2=1$$

$$S=\iint_R\sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dy\,dx$$

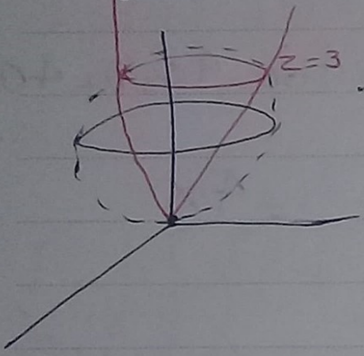
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{4r^2+1}\,r\,dr\,d\theta=2\pi\times\frac{1}{8}(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}\times\frac{2}{3}\Big]_0^1$$

Subject

Date

4) مساحت بخشی از کره $x^2+y^2+z^2=4z$ را بدست آورید که توسط سهمی وار $z=x^2+y^2$ جدا شده.

$$x^2+y^2+z^2=4z \rightarrow x^2+y^2+(z-2)^2=4$$



ابتدا ارتفاع محل تلاقی کره و سهمی وار را بدست می آوریم.

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4z \\ z=x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow z+z^2=4z$$

$$\Rightarrow z^2-3z=0 \Rightarrow z=0,3 \quad , \quad z=2+\sqrt{4-x^2-y^2}=g(x,y)$$

$$S=\iint \sqrt{\frac{x^2}{4-x^2-y^2}+\frac{y^2}{4-x^2-y^2}+1}\, dA$$

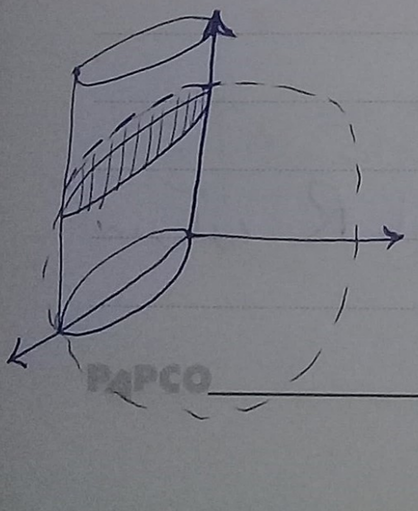
$R: x^2+y^2 \leq 3$

$$=\iint \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2r\,dr\,d\theta}{\sqrt{4-r^2}} = 2\pi \left. 2\sqrt{4-r^2}\right)_0^{\sqrt{3}} = 4\pi(1-2)$$

$R: x^2+y^2 \leq 3$

$$=4\pi$$

5) مساحت بخشی از کره $x^2+y^2+z^2=4$ که توسط استوانه $x^2+y^2=2x$ جدا شده.



$$x^2+y^2=2x \rightarrow (x-1)^2+y^2=1$$

$$z=\sqrt{4-x^2-y^2}=g(x,y)$$

$R: x^2+y^2=2x$

Subject
Date

$$S=\iint_R \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dy\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{r=2\cos\theta}\frac{2r}{\sqrt{4-r^2}}\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(-2\sqrt{4-r^2}\right)\Big|_0^{2\cos\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-4\sin\theta+4\,d\theta=4\cos\theta+4\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=4\pi$$

انتگرال سه‌گانه: فرض کنید D یک فضای بسته در R^3 باشد. اگر تابع $f(x,y,z)$ به ازای هر نقطه در D تعریف شده باشد آنگاه انتگرال f روی D را با نماد $\iiint_D f(x,y,z)\,dV$ که در آن $dV=dz\,dy\,dx$. اگر

$$D=\{(x,y,z)\mid g_1(x,y)\leqslant z\leqslant g_2(x,y),\ k_1(x)\leqslant y\leqslant k_2(x),\ a\leqslant x\leqslant b\}$$

آنگاه:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV=\int_a^b\int_{k_1(x)}^{k_2(x)}\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

$$=\iint_R\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

که در آن R سایه فضای D بر روی صفحه xy است.

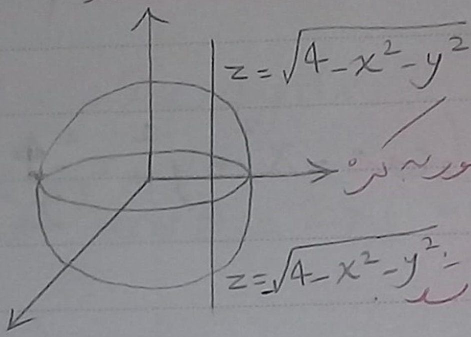
PAPCO

Subject

Date

ex. مقدار انتگرال های زیر را بدست آورید

1) $I = \iiint_D (x^2+y^2)\,dV$



که در آن D فضای محصور به کره $x^2+y^2+z^2=4$ می باشد

$$I = \iint_R \int_{z=-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx$$

که در آن R سایه D یعنی $R: x^2+y^2=4$ است.

$$I = \iint_R (x^2+y^2)z\Big]_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dy\,dx = \iint_R 2(x^2+y^2)\sqrt{4-x^2-y^2}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 2r^3\sqrt{4-r^2}\,dr\,d\theta = 4\pi\int_0^2 r^3\sqrt{4-r^2}\,dr$$

$$4-r^2 = u^2 \rightarrow -2r\,dr = 2u\,du$$

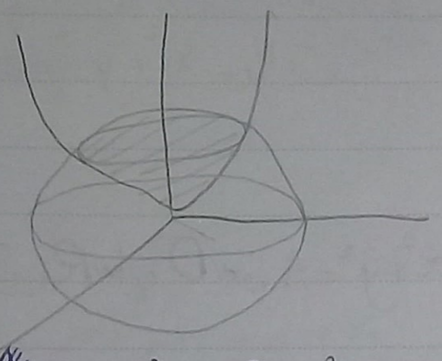
$$= 4\pi\int_0^2 r^3\sqrt{4-r^2}\,dr = 4\pi - \int (4-u^2)u(-u\,du) =$$

$$-4\pi\int 4u^2-u^4\,du = -4\pi\left(\frac{4}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}(4-r^2)^{\frac{5}{2}}\right)\Big/_0^2$$

Subject
Date

نکته: $\iiint_D dv$ عبارت از حجم فضای D .

ex) 1 حجم فضای محصور به کره $x^2+y^2+z^2=2$ و سهمی وار $z=x^2+y^2$ را بدست آورید.



$$V=\iiint_D dv=\iint_R \int_{z=x^2+y^2}^{z=\sqrt{2-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$$

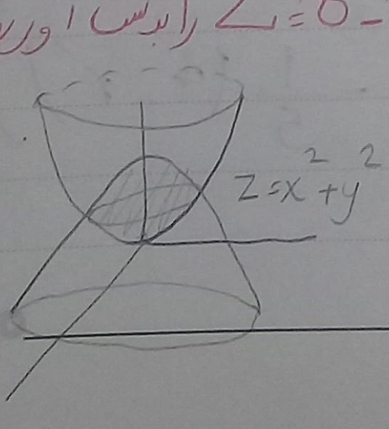
که در آن R محل تلاقی دو رویه $z=x^2+y^2$ و $2=x^2+y^2+z^2$ است

$$R:\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x^2+y^2+z^2=2 \end{cases} \qquad 6\ z=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} \to 1,\ -2$$

$R: x^2+y^2=1$ پس: $V=\iint_R \sqrt{2-x^2-y^2}-(x^2+y^2)\,dy\,dx$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{2-r^2}-r^3\,dr\,d\theta=2\pi\left[\frac{-1}{2}(2-r^2)^{\frac{3}{2}}\times\frac{2}{3}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1$$

2 حجم فضای محصور به $Z=x^2+y^2$ و $Z=8-x^2-y^2$ را بدست آورید.



$$V=\iint_R \int_{z=x^2+y^2}^{z=8-x^2-y^2} dz\,dy\,dx$$

Subject
Date

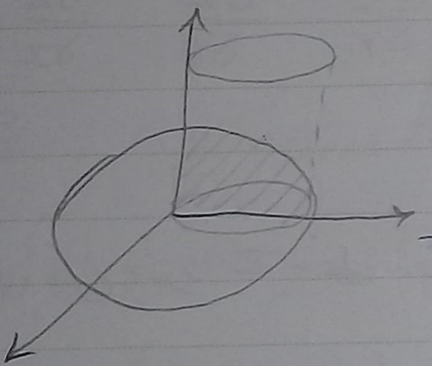
$$R:\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z = 8-x^2-y^2 \end{cases}$$

$$R: x^2+y^2=4$$

$$V=\iint_R 8-2x^2-2y^2\,dy\,dx$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2 8r-2r^3\,dr\,d\theta = 2\pi\left(\frac{8r^2}{2}-\frac{2r^4}{4}\right)\Big|_0^2$$

3) حجم فضای محصور با استوانه‌ی $x^2+y^2=2y$ درون $x^2+y^2+z^2=4$ $(z\geq 0)$



$$x^2+y^2=2y \longrightarrow x^2+(y-1)^2=1$$

$$V=\iint_R\int_{z=0}^{z=\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\,dx\,dy$$

$R: x^2+(y-1)^2=1$ که در آن

$$V=\iint_R\sqrt{4-x^2-y^2}\,dy\,dx=\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} r\sqrt{4-r^2}\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{-1}{2}(4-r^2)^{\frac{3}{2}}\times\frac{2}{3}\Big]_0^{2\sin\theta}d\theta=\frac{-1}{3}\int_0^{\pi}8\cos^3\theta-8\,d\theta$$

$$=-\frac{8}{3}\int_0^{\pi}\cos\theta(1-\sin^2\theta)-1\,d\theta=-\frac{8}{3}\left[\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}-\theta\right]_0^{\pi}=\frac{8\pi}{3}$$

PAPCO

تغییر متغیر استوانه‌ای: در این تغییر متغیر قرار می‌دهیم $x = r\cos\theta$ و $z = z$ و $y = r\sin\theta$ در نتیجه:

$$J(r,\theta,z) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = r$$

پس:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dv = \iiint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\,dz\,dr\,d\theta$$

برای تعیین حدود z خطی به موازات محور z رسم کنیم تا از ناحیه D عبور کند

سپس معادلات رویه‌ها را به ترتیب به زبان مختصات استوانه‌ای معرفی کرد.

همچنین حدود r و θ را از سایه D نیز بدست می‌آوریم.

ex) هرگاه D ناحیه‌ی محصور به کره‌ی واحد مرکز مبدأ مختصات باشد مقدار

انتگرال زیر را با استفاده از تغییر متغیر استوانه‌ای بدست آورید.

سایه‌ی D دایره‌ی واحد است.

$$I = \iiint_D \frac{dv}{(1+x^2+y^2)\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} \frac{r\,dz\,dr\,d\theta}{(1+r^2)(\sqrt{1-r^2-z^2})} =$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a}$$

Subject
Date

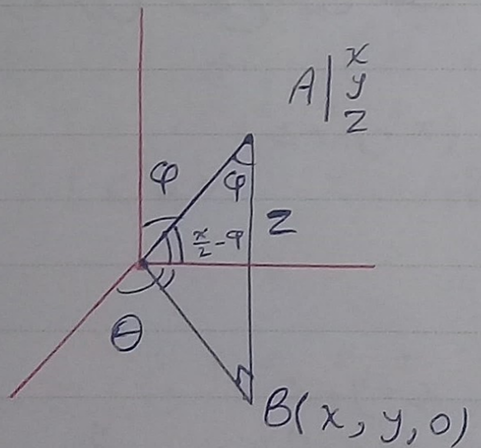
$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r}{1+r^2} \sin^{-1}\frac{z}{\sqrt{1-r^2}}\Bigg]_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\underbrace{\left(\sin^{-1}1 - \sin^{-1}(-1)\right)}_{\pi} dr\,d\theta$$

$$= \pi \times \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r}{1+r^2} d\theta = 2\pi^2 \times \frac{1}{2} \ln(1+r^2)\Big]_0^1$$

$$= \pi^2 \ln 2$$

تغییر متغیر کروی: به هر نقطه $A\left|\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\right.$ می‌توان مقادیر ρ و φ و θ را نسبت داد که در آن $\rho = |OA| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ و φ زاویه‌ای است که پاره خط OA با جهت مثبت محور z ها می‌سازد. θ زاویه‌ای است که پاره خط OB با جهت مثبت محور x ها می‌سازد.



از مثلث قائم الزاویه OAB نتیجه می‌گیریم:

$$\sin\varphi = \frac{r}{\rho}\ ,\quad \cos\varphi = \frac{z}{\rho}$$

PAPCO

Subject
Date

از طرفی $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ پس داریم:

$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta$$

$$y = \rho \sin\varphi \sin\theta \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$z = \rho \cos\varphi$$

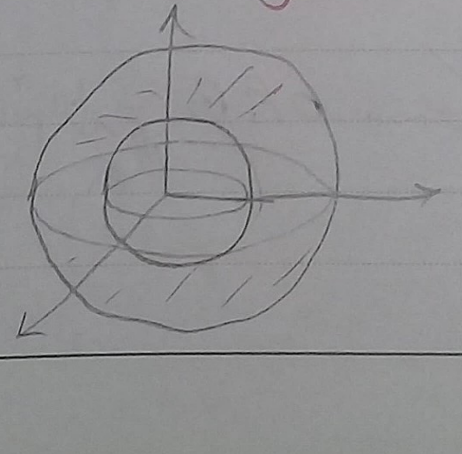
$$dz\,dy\,dx = |J(\rho, \varphi, \theta)|\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

برای تعیین حدود ρ یک شعاع دلخواه از مبدا مختصات رسم کرده تا وارد ناحیه D گردد
سپس معادله رویه‌ها را به زبان مختصات کروی بیان کرده. برای تعیین حدود φ به
زاویه اولین و آخرین شعاع با جهت مثبت محور z ها توجه کرده و حدود θ را از سایه D بدست آورید

ex)

$$I = \iiint_D (x^2+y^2+z^2)\, e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\, dv$$

D فضای محصور به رویه‌ی $x^2+y^2+z^2=1$ و $x^2+y^2+z^2=4$



$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{\rho=1}^{\rho=2} \rho^2 e^{\rho^5} \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$x^2+y^2+z^2=1 \rightarrow \rho=1$$

$$x^2+y^2+z^2=4 \rightarrow \rho=2$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \int_1^2 \rho^4 e^{\rho^5} d\rho = 2\pi \left(-\cos\varphi\right)\Big|_0^{\pi} \left(\frac{1}{5} e^{\rho^5}\right)\Big|_1^2$$

تعریف میدان برداری: میدان برداری تابعی مانند $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ با ضابطه‌ی

$$F(x,y,z) = M(x,y,z)i + N(x,y,z)j + P(x,y,z)k$$

که در آن M، N، P توابع حقیقی سه متغیره می‌باشند. (ex

$$F(x,y,z) = x^2 y i + (y+z)j + (x^2+z)k$$

$A \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[i+2j+2k]{F(1,1,1)} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[12i+6j+9k]{F(2,3,3)} \begin{vmatrix} 14 \\ 9 \\ 12 \end{vmatrix} \longrightarrow \dots$

تعریف کار: کار انجام شده در میدان برداری $\vec{F} = Mi + Nj + Pk$ بر روی مسیر

$C: \vec{r}(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ ، $a \leqslant t \leqslant b$ را با نماد

$\int_C F \cdot dr$ نشان داده. که داریم:

کار: $\int_C F \cdot dr = \int_C (Mi + Nj + Pk) \cdot (dx\,i + dy\,j + dz\,k)$

$$= \int_C M\,dx + N\,dy + P\,dz = \int_C \left(M x'(t) + N y'(t) + P z'(t)\right) dt$$

PAPCO

$$= \int M\big(x(t), y(t), z(t)\big)\, x'(t) + N\big(x(t), y(t), z(t)\big)\, y'(t)$$

$$+ P\big(x(t), y(t), z(t)\big)\, z'(t)\, dt$$

ex) کار انجام شده در میدان برداری $\vec{F} = (x+y^2)i + (2x-y)j + (z+y)k$ را

بر روی مسیرهای زیر بدست آورید:

الف) $C: \vec{r(t)} = ti + tj + tk \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$

$$\text{کار} = \int_0^1 (t+t^2)\times 1 + (2t-t)\times 1 + (t+t)\times 1\, dt$$

$$= \int_0^1 4t + t^2\, dt = \frac{4t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{7}{3}$$

ب) $C: \vec{r(t)} = t^2 i + tj + t^3 k \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$

$$\text{کار} = \int_0^1 (t^2+t^2)\times 2t + (2t^2-t)\times 1 + (t^3+t)\times 3t^2\, dt$$

$$= \int_0^1 7t^3 + 2t^2 - t + 3t^5\, dt = 7\frac{t^4}{4} + 2\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 3\frac{t^6}{6}\Big]_0^1$$

$$= \frac{7}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{21+8}{12} = \frac{29}{12}$$

این مثال نشان می دهد کار در برخی از میدان های برداری به مسیر حرکت

بستگی دارد.

Subject
Date

تعریف: هرگاه کار در یک میدان برداری مستقل از مسیر باشد آنگاه میدان را پایستار (کنسرواتیو) نامند.

نتیجه: میدان برداری $\vec{F} = Mi + Nj + PK$ پایستار است هرگاه

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{Curl} F} = \vec{0}$$

که در آن $\vec{\nabla}$ را نماد دل می‌نامند که عبارت است از شکل زیر می‌باشد:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} K$$

بنابراین:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & K \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

$$= i\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right) - j\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) + K\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

در این صورت تابع $f(x, y, z)$ موسوم به تابع پتانسیل وجود دارد به طوری که

$$\vec{\nabla f} = \vec{F}$$

$$\begin{cases} f_x = M \\ f_y = N \\ f_z = P \end{cases}$$

PAPCO

Subject
Date

و به ازای هر دو نقطه A و B داریم:

$$\int_A^B F \cdot dr = f(B) - f(A)$$

ex) نشان دهید میدان برداری $\vec{F} = (x^2+y)i + (x-y)j$ پایستار است. پس مقدار انتگرال $\int_C F \cdot dR$ که در آن $C: r(t) = \sqrt{t}\,i + (t^2+1)j \quad 0 \le t \le 1$ را بدست آورید.

$$\vec{\text{curl}F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2+y & x-y & 0 \end{vmatrix} = i(0-0) - j(0-0) + k(1-1) = \vec{0}$$

برای محاسبه مقدار کار صرف نظر از مسیر، تابع پتانسیل را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f_x = x^2 + y \xrightarrow{\int dx} \frac{x^3}{3} + yx \\ f_y = x - y \xrightarrow{\int dy} xy - \frac{y^2}{2} \end{cases}$$

تابع پتانسیل: $f(x,y) = \frac{x^3}{3} + yx - \frac{y^2}{2}$

$$\int F \cdot dR = f(1,2) - f(0,1) = \left(\frac{1}{3} + 2 - \frac{4}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

ex) انتگرال زیر را حساب کنید:

PAPCO

Subject
Date

$$I = \int_{(1,0,2)}^{(0,2,1)} (\underbrace{ze^x + e^y}_{M})dx + (\underbrace{xe^y - e^z}_{N})dy + (\underbrace{-ye^z + e^x}_{P})dz$$

$$\text{curl}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ze^x + e^y & xe^y - e^z & -ye^z + e^x \end{vmatrix} = i(-e^z + e^z) - j(e^x - e^x) + k(e^y - e^y) = \vec{0}$$

$$\begin{cases} f_x = ze^x + e^y \xrightarrow{\int dx} ze^x + xe^y \\ f_y = xe^y - e^z \xrightarrow{\int dy} xe^y - ye^z \\ f_z = -ye^z + e^x \xrightarrow{\int dz} -ye^z + ze^x \end{cases}$$

$$f(x,y,z) = xe^y - ye^z + ze^x$$

$$I = f(0,2,1) - f(1,0,2)$$

قضیه گرین: میدان برداری $\vec{F} = M(x,y)i + N(x,y)j$ مفروض است. کار

انجام شده در میدان F در روی مسیر بسته C ـ طوری که توابع M و N و مشتقات

جزئی آن‌ها در C تعریف شده باشد عبارت است از:

$$\text{کار} = \oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R N_x - M_y \,dy\,dx$$

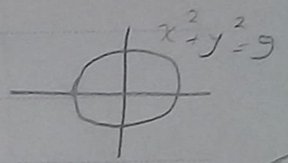
PaPCO

که در آن R ناحیه محصور به منحنی بسته C است.

Subject
Date

ex) به کمک قضیه‌ی گرین مقدار انتگرال $I=\oint_C (3y-e^{\sin x})dx+(7x+\sqrt{y^4+1})dy$

که در آن $C: x^2+y^2=9$ است را بدست آورید



$I=\iint_R 7-3\,dy\,dx = 4\iint_R dy\,dx = 36\pi$

$\iint_R dy\,dx = R$ مساحت

با : $4\int_0^{2\pi}\int_0^3 r\,dr\,d\theta$

$= 4\int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^3 r\,dr = 8\pi \times \frac{r^2}{2}\Big]_0^3 = 36\pi$

ex) فرض کنید $C: x^2+y^2=100$ مطلوب است :

$I=\oint_C (y^3+y)dx+(3y^2x)dy$

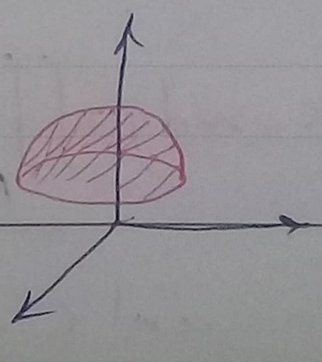
$=\iint_R 3y^2-(3y^2+1)\,dy\,dx = \iint_R -dy\,dx = -100\pi$

تعریف شار : شار میدان برداری $F=Mi+Nj+PK$

گذر از سطح $S: z=g(x,y)$ در میدان برداری $F=Mi+Nj+PK$

عبارت است از :

شار $= \iint_S F\cdot n\,ds$



Subject
Date

که در آن

بردار یکه عمود بر $\vec{n} = \dfrac{-g_x i - g_y j + k}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}}$

سطح S و $S = \iint_R \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}\, dy\, dx$ بنابراین:

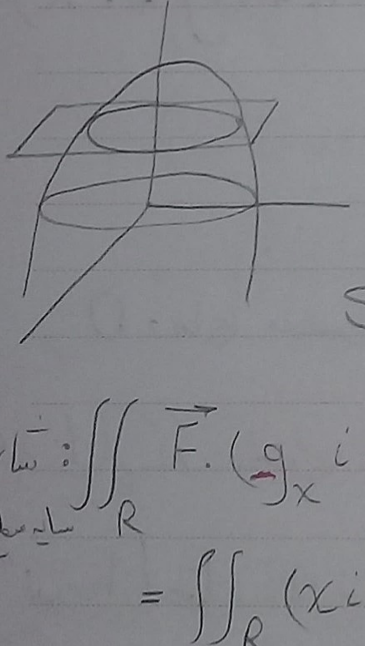
شار $= \iint (F.n)\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}\, dy\, dx$

پس:

شار $= \iint_R \vec{F} \cdot (-g_x i - g_y j + k)\, dy\, dx$ ✓ $(mi + nj + pk)$

$= \iint_R m(x,y,g(x,y))g_x + n(x,y,g(x,y))g_y + p(x,y,g(x,y))\, dy\, dx$

ex) مطلوب است شار گذرنده از سطح $Z = 4 - x^2 - y^2$ در بالای صفحه‌ی $Z = 1$ در میدان برداری $\vec{F} = xi + yj + k$.



در این مثال: S مقطع شار سطح رو به سمت بالا است

$S: Z = 4 - x^2 - y^2 = g(x,y)$

شار سایه سطح S: $\iint_R \vec{F} \cdot (-g_x i - g_y j + k)\, dy\, dx$

$= \iint_R (xi + yj + zk) \cdot (+2xi + 2yj + k)\, dy\, dx$

PAPCO

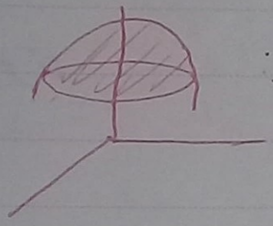
Subject
Date

$R: x^2+y^2=3$

$$= \iint_R 2x^2 + 2y^2 + z \, dy\,dx = \iint_R 4 - x^2 - y^2 \, dy\,dx \qquad (z = 4-x^2-y^2)$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} 4r - r^3 \, dr\,d\theta = 2\pi\left(\frac{4r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^{\sqrt{3}}$$

قضیه‌ی دیورژانس: میدان برداری $\vec{F} = Mi + Nj + Pk$ و سطح بسته S را



در نظر می‌گیریم. در این صورت شار گذرنده از سطح بسته S عبارت است از:

$$\oiint_S F \cdot n\,ds = \iiint_D \operatorname{div} F \, dv$$

که در آن

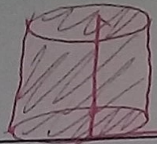
$$\operatorname{div} F = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) \cdot (Mi + Nj + Pk)$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

و D فضای محصور به سطح بسته S است.

ex 1) به کمک قضیه‌ی دیورژانس شار برون‌سوی $\vec{F} = x^2 i + y^2 j + z^2 k$ گذرنده از استوانه $x^2 + y^2 = 4$ محدود به صفحات $z=0$ و $z=1$ را بدست آورید.

Subject
Date



$R: x^2+y^2=4$

$$\text{شار} = \iint_R \int_{z=0}^{z=1} 2x+2y+2z \, dz\, dy\, dx$$

$$= \iint_R (2xz+2yz+z^2)\Big|_0^1 dy\,dx = \iint_R 2x+2y+1 \, dy\, dx$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 2r^2\cos\theta + 2r^2\sin\theta + r \, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2r^3}{3}\cos\theta + \frac{2r^3}{r^3}\sin\theta + \frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{16}{3}\cos\theta + \frac{16}{3}\sin\theta + 2\, d\theta = \frac{16}{3}\sin\theta - \frac{16}{3}\cos\theta + 2\theta\Big]_0^{2\pi} = 4\pi$$

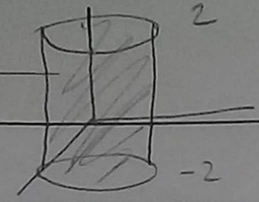
2) شار میدان برداری $F = zi + yj + xk$ را روی کره‌ی واحد $x^2+y^2+z^2=1$ محاسبه نمایید (با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس).

$$\text{شار} = \iiint_{D:\, x^2+y^2+z^2\leq 1} 1\, dv = \frac{4\pi}{3}$$ → حجم کره

3) شار میدان برداری $F = xi + yj + zk$ گذرنده از استوانه‌ی توپر $x^2+y^2 \leq 1$ و $-2 \leq z \leq 2$ را محاسبه کن. (با قضیه‌ی دیورژانس)

PAPCO

Subject
Date



شار $= \iiint_D 3\,dV = 3\iiint_D dV = 3 \times 4\pi = 12\pi$

$$= 3\iint_R \int_{z=-2}^{z=2} dz\,dy\,dx \quad R: x^2+y^2=1 \quad \longrightarrow \; = 3\iint [z]_{-2}^{2}\, dy\,dx = 12\iint_R dy\,dx$$

$$= 12\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,dr\,d\theta = 12 \times 2\pi \times \left(\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = 12\pi$$

4) اگر C فصل مشترک رویه‌های $y=x$ و $z=\ln(1+x)$ از مبدأ تا $A(1,1,\ln 2)$ باشد مطلوب است مقدار انتگرال زیر:

$$I = \int (2x\sin \pi xy - e^z)\,dx + (\pi x^2 \cos \pi xy - 3e^z)\,dy - xe^z\,dz$$

با توجه به معادلات رویه‌ها پیمایش می‌کنیم: $0 \leq t \leq 1$

$$\vec{r}(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k = ti + tj + \ln(1+t)k$$

$$I = \int_0^1 (2t\sin \pi t - 1 - t) + (\pi t^2 \cos \pi t - 3 - 3t) - t(1+t)\frac{1}{1+t}\,dt$$

راه دوم:

$$\overrightarrow{\text{curl}F} \overset{?}{=} \vec{0} \rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x\sin \pi xy - e^z & \pi x^2\cos \pi xy - 3e^z & -xe^z \end{vmatrix}$$

پایستار نیست پس راه اول را باید برویم.

$$= i\left[(0+3e^z)\right] - j\left[-e^z + e^z\right] + k\left[2\pi x\cos \pi xy - 2\pi x\cos \pi xy\right] \neq \vec{0}$$

Subject
Date

۵) کار انجام شده توسط نیروی $F = -y^3 i + x^3 j - z^3 k$ بر منحنی C را بیابید به طوری که C فصل مشترک استوانه‌ی $4x^2 + y^2 = 1$ و صفحه‌ی $2x + 2y + z = 3$ است (به کمک قضیه‌ی استوکس)

قضیه‌ی استوکس: فرض کنید S یک سطح کراندار با مرز بسته‌ی C باشد در این صورت کار انجام شده در میدان برداری $\vec{F} = mi + nj + pk$ بر روی مرز بسته‌ی C از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\oint_C F \cdot dR = \iint_S \text{Curl} F \cdot \vec{n} \, ds$$

که در آن

$$\vec{n} = \frac{-g_x i - g_y j + k}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}}$$ و

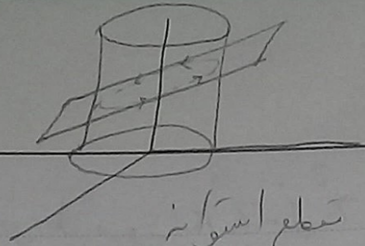
$$z = g(x, y) \quad , \quad ds = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1} \, dy\, dz$$

معادله‌ی صفحه‌ای است که منحنی بسته C بر روی آن واقع است. در این صورت:

$$\oint_C F \cdot dR = \iint_R \text{Curl} F \cdot (-g_x i - g_y j + k) \, dy\, dx$$

که در آن R سایه S بر روی صفحه‌ی xy است.

Subject
Date



حل سوال 5 :

مقطع استوانه $4x^2+y^2=1$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}}+y^2=1$$

برای تعیین g باید توجه کنیم که منحنی C بر روی چه صفحه‌ای قرار گرفته است

$$Z=3-2x-2y=g(x,y) \quad , \quad g_x=-2 \quad , \quad g_y=-2$$

$$\text{Curl}F=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^3 & x^3 & -z^3 \end{vmatrix}=i(0-0)-j(0-0)+k(3x^2+3y^2)$$

$$,K=\iint (3x^2+3y^2)k\cdot(2i+2j+k)\,dy\,dx$$

$$=3\iint_{R:4x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)\,dy\,dx$$

$$x=\frac{1}{2}r\cos\theta \quad , \quad y=r\sin\theta \quad , \quad J=\frac{1}{2}r$$

$$,K=3\iint \frac{1}{4}r^3\cos^2\theta+r^3\sin^2\theta\,dr\,d\theta=$$

$$\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\Big(\frac{1}{16}\underbrace{\cos^2\theta}_{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}+\frac{1}{4}\underbrace{\sin^2\theta}_{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}\Big)\,d\theta$$

$$=\frac{3}{2}\Big[\frac{1}{32}\big(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\big)+\frac{1}{8}\big(\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\big)\Big]_0^{2\pi}=i\frac{3}{2}\Big(\frac{10\pi}{32}\Big)$$

PAPCO

Subject
Date

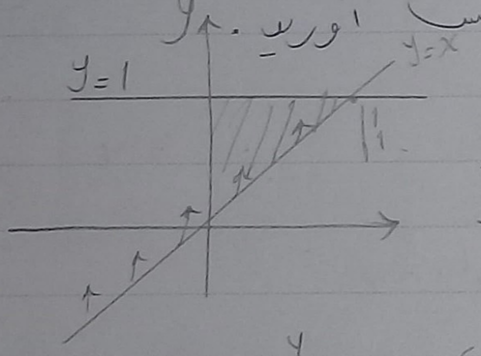
گرین: $\oint_C M dx + N dy = \iint N_x - M_y \, dy \, dx$

6) فرض کنید C دایره‌ی $x^2 + y^2 = 100$ که در خلاف جهت عقربه‌های ساعت جهت‌دار شده است. مطلوب است حاصل:

$$I = \oint_C (y^3 + y)\,dx + 3y^2 x\,dy$$

$$= \iint_{R:\ x^2+y^2 \leq 100} 3y^2 - (3y^2 - 1)\,dy\,dx = -\iint_{x^2+y^2 \leq 100} dy\,dx = -100\pi$$

7) مقدار انتگرال $I = \int_0^1 \int_x^1 \frac{\sin y}{y}\,dy\,dx$ را بدست آورید.

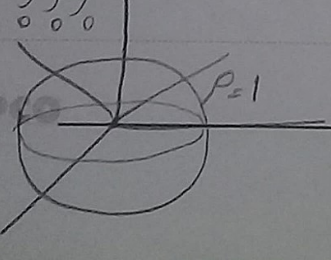


$$I = \int_0^1 \int_{x=0}^{x=y} \frac{\sin y}{y}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin y}{y}\, x \Big]_0^y dy = \int_0^1 \sin y\,dy = -\cos y\Big]_0^1 = -\cos 1 + 1$$

8) مقدار انتگرال $I = \iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dv$ را محاسبه کنید که در آن D ناحیه درون کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ است. برای حل این انتگرال از تغییر متغیر کروی استفاده می‌کنیم.

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$



$x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$\rho^2 = 1$

$\rho = 1$

Subject
Date

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 d\rho = 2\pi \left(-\cos\varphi\right)_0^{\pi} \left(\frac{1}{3} e^{\rho^3}\right)_0^1$$

۹) مساحت محصور به چهار ناحیه $y = x^2$ و $y = 2x^2$ و $x = y^2$ و $x = 3y^2$ را بیابید.

$$S = \iint_R dy\,dx \qquad u = \frac{y}{x^2} \;,\; v = \frac{x}{y^2}$$

$$1 \leq u \leq 2 \qquad 1 \leq v \leq 3$$

$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{-2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{y^2} & \frac{-2x}{y^3} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\frac{3}{x^2 y^2}} = \frac{x^2 y^2}{3}$$

$$uv = \frac{1}{xy} \rightarrow xy = \frac{1}{uv}$$

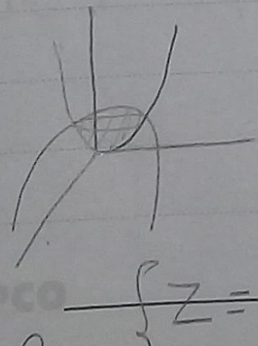
$$x^2 y^2 = \frac{1}{u^2 v^2}$$

$$= \iint \frac{x^2 y^2}{3} du\,dv = \frac{1}{3} \int_1^3 \int_1^2 \frac{1}{u^2 v^2} du\,dv$$

$$= \frac{1}{3} \int_1^3 \frac{1}{v^2} dv \int_1^2 \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{3} \left(\frac{-1}{v}\right)_1^3 \left(-\frac{1}{u}\right)_1^2$$

۱۰) حجم بین 2 رویه $z = x^2 + y^2$ و $z = 8 - x^2 - y^2$ را بدست آورید.

$z = 8 - x^2 - y^2$



$$V = \iiint_R dz\,dy\,dx$$

$z = x^2 + y^2$

$$R: \begin{cases} Z = 8 - x^2 - y^2 \\ Z = x^2 + y^2 \end{cases} \longrightarrow x^2 + y^2 = 4$$

Subject
Date

$$= \iint_R 8 - 2x^2 - 2y^2 \, dy\, dx = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} \pi r - 2r^3 \, dr\, d\theta$$

$$= 2\pi\left(\frac{\pi r^2}{2} - \frac{2r^4}{4}\right)\Big|_0^2$$

11) اگر $F = (3+2xy)i + (x^2 - 3y^2)j$ آنگاه تابع پتانسیل را بیابید. وسپس $\oint_C F \cdot dR$ را بر روی مسیر $C: r(t) = e^t \sin t\, i + e^t \cos t\, j$ ، $0 \leq t \leq \pi$ بدست آورید.

$$\begin{cases} f_x = M \\ f_y = N \end{cases} \qquad \begin{cases} f_x = 3 + 2xy \xrightarrow{\int dx} 3x + x^2 y \\ f_y = x^2 - 3y^2 \xrightarrow{\int dy} x^2 y - y^3 \end{cases}$$

$t=0 \to A\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}$

$t=\pi \to B\begin{vmatrix}0\\-e^\pi\end{vmatrix}$

$$f(x,y) = 3x + x^2 y - y^3$$

$$\oint_C F \cdot dR = f(0,-e^\pi) - f(0,1)$$

1) مطلوب است $\iint_R x+2y \, dA$ که در آن R ناحیه بین خطوط $x+2y=2$ ، $x+2y=1$ ، $x-y=3$ ، $x-y=-1$ است. با تغییر متغیر $x+2y=u$ ، $x-y=v$

$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}} = \frac{1}{-3}$$

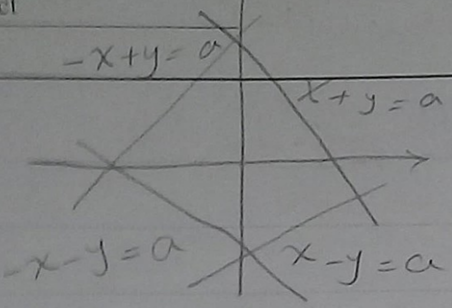
در نتیجه: $I = \frac{1}{3}\int_{-1}^{3}\int_{1}^{2} u \, du\, dv =$

$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{3} dv \int_1^2 u\, du = \frac{1}{3}(4)\left(\frac{u^2}{2}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{3} \times 4 \times \frac{3}{2}$$

$$= 2$$

PAPCO

Subject
Date



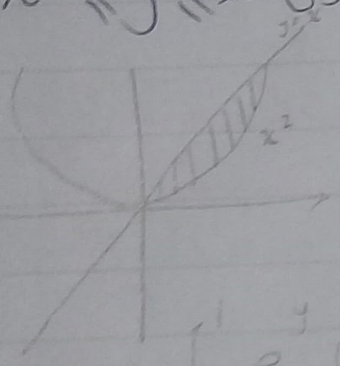
2) مقدار $I=\iint_{|x|+|y|\leqslant a} e^{x+y}\,dA$ را حساب کنید.

$x+y=u$, $x-y=v$

$J=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}}=\frac{-1}{2}$ $I=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{u}\,du\,dv$

$=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}dv\int_{-a}^{a}e^{u}\,du=\frac{1}{2}\times 2a(e^{a}-e^{-a})=a(e^{a}-e^{-a})$

3) مطلوب است مقدار $I=\iint_R \frac{x}{y}e^{y}\,dy\,dx$ که در آن $x^2\leqslant y\leqslant x$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

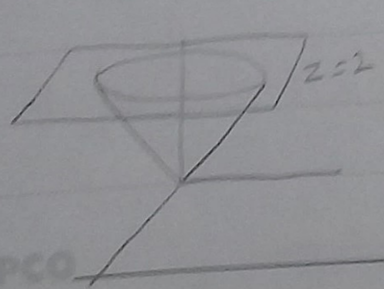


$I=\int_0^1\int_{x=y}^{x=\sqrt{y}}\frac{x e^{y}}{y}\,dx\,dy$

$=\int_0^1\frac{e^{y}}{y}\left[\frac{x^2}{2}\right]_y^{\sqrt{y}}dy=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{e^{y}}{y}(y-y^2)\,dy=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{y}-ye^{y}\,dy$

$=\frac{1}{2}\left[e^{y}-(ye^{y}-e^{y})\right]_0^1=\frac{1}{2}\left[2e^{y}-ye^{y}\right]_0^1$

4) مساحت بخشی از مخروط $3z^2=x^2+y^2$ را بیابید که $0\leqslant z\leqslant 2$.



$S=\iint_R\sqrt{g_x^2+g_y^2+1}\,dy\,dx$

که در آن $S: z=g(x,y)$

Subject
Date

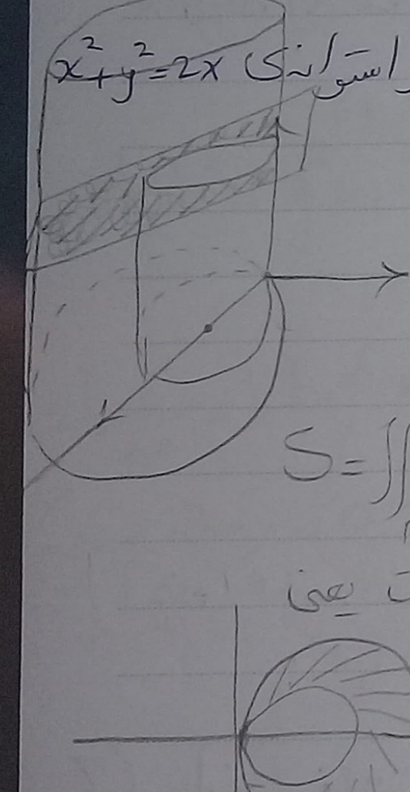
$$g_x = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$Z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} = g(x,y) \quad , \quad g_y = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$S = \iint \sqrt{\frac{x^2}{3(x^2+y^2)} + \frac{y^2}{3(x^2+y^2)} + 1}\, dy\, dx$$

$R: x^2+y^2 \leq 12$

$$= \iint_R \frac{2}{\sqrt{3}}\, dy\, dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\, 12\pi = \frac{24\pi}{\sqrt{3}}$$

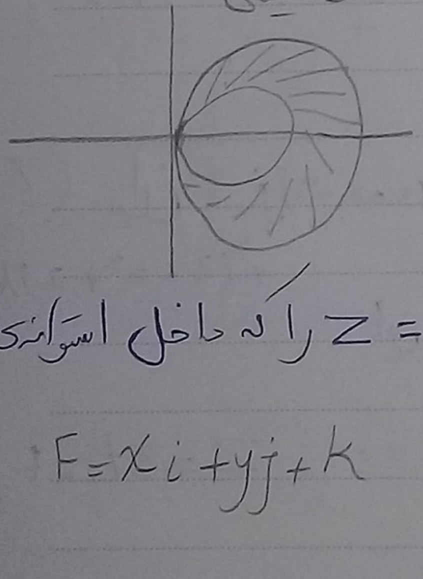


5) مساحت قسمتی از صفحه‌ی $x+2y+3z=6$ که بین دو استوانه‌ی $x^2+y^2=2x$ و $x^2+y^2=4x$ قرار دارد را بدست آورید.

$$S: z = 2 - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}x = g(x,y)$$

$$S = \iint_R \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 1}\, dy\, dx$$

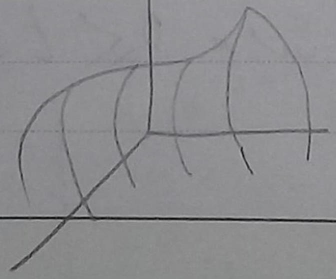
ناحیه‌ی R ناحیه‌ی بین دو دایره‌ی $x^2+y^2=2x$ و $x^2+y^2=4x$ است یعنی



$$S = \frac{\sqrt{14}}{3} \iint_R dy\, dx = \frac{\sqrt{14}}{3} \times 3\pi$$

6) شار رو به بالا، گذرنده بر بخشی از رویه‌ی $z = x^2 - y^2$ را که داخل استوانه‌ی $x^2+y^2=a^2$ قرار دارد، بیابید.

$F = xi + yj + k$



PAPCO

Subject
Date

$S: z = x^2 - y^2 = g(x, y)$

$$S = \iint_R \sqrt{(2x)^2 + (-2y)^2 + 1}\, dy\, dx = \iint_R \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dy\, d$$

$R: x^2 + y^2 \leq a$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^a r\sqrt{4r^2 + 1}\, dr\, d\theta = 2\pi\left(\frac{1}{8}(4r^2+1)^{\frac{3}{2}} \times \frac{2}{3}\right)_0^a$$

$$\text{شار} = \iint_R F\cdot(-g_x i - g_y j + k)\, dy\, dx$$

$$= \iint (x i + y j + k)\cdot(-2x i + 2y j + k)\, dy\, dx$$

$R: x^2 + y^2 = a^2$

$$= \iint_R -2x^2 + 2y^2 + 1\, dy\, dx = 2\int_0^{2\pi}\int_0^a -r^3\cos^2\theta + r^3\sin^2\theta + r\, dr\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi} -\frac{a^4}{4}\cos^2\theta + \frac{a^4}{4}\sin^2\theta + \frac{a^2}{2}\, d\theta \qquad \left(= \pi a^2\right.$$

$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$, $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$

$$= 2\left(\frac{-a^4}{4}\left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right) + \frac{a^4}{4}\left(\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right) + \frac{a^2}{2}\theta\right)_0^{2\pi}$$

7) سیال $F = (y^2\cos x + z^3)i + (2y\sin x - 4)j + (3xz^2 + 2)k$ مفروض است. کار انجام شده توسط

این سیال را روی منحنی $x = \sin^{-1} t$, $y = 1 - 2t$ و

$z = 3t - 1$ $0 \leq t \leq 1$ بدست آورید.

$$\text{Curl } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2\cos x + z^3 & 2y\sin x - 4 & 3xz^2 + 2 \end{vmatrix}$$

Subject
Date

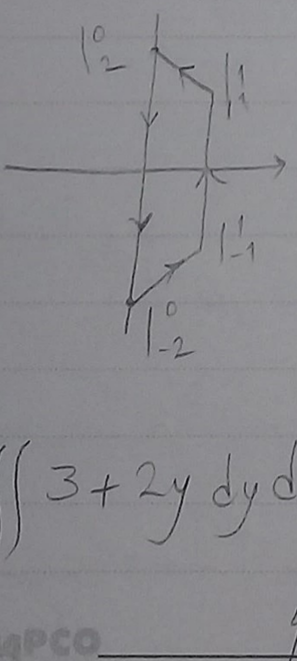
$= i(0-0) - j(3z^2 - 3z^2) + k(2y\cos x - 2y\cos x) = \vec{0}$

$$\begin{cases} f_x = y^2\cos x - z^3 \xrightarrow{\int dx} y^2\sin x + xz^3 \\ f_y = 2y\sin x - 4 \xrightarrow{\int dy} y^2\sin x - 4y \\ f_z = 3xz^2 + 2 \xrightarrow{\int dz} xz^3 + 2z \end{cases}$$

$f(x,y,z) = xz^3 + y^2\sin x - 4y + 2z$

کار $= \int_{(0,1,-1)}^{(\frac{\pi}{2},-1,2)} F \cdot dR = f(\frac{\pi}{2},-1,2) - f(0,1,-1)$

8 انتگرال $I = \oint (x\sin y^2 - y^2)dx + (x^2 y\cos y^2 + 3x)\,dy$ را در صورتی بیابید که C مرز ذوزنقه به رئوس $(0,-2)$, $(1,-1)$, $(1,1)$, $(0,2)$ در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت باشد.



$I = \iint_R N_x - M_y \, dy\,dx = \iint (2xy\cos y^2 + 3) - (2xy\cos y^2 - 2y)\,dy\,dx$

$= \iint 3 + 2y \, dy\,dx$

از طریق معادله خط AB عبارت است از:

$y - 2 = \frac{2-1}{0-1}(x) \Rightarrow y = -x + 2$

PAPCO

Subject
Date

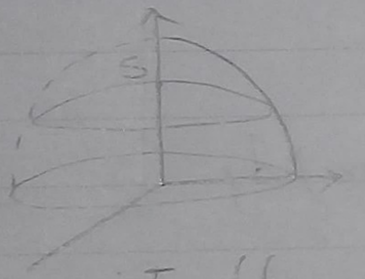
معادله خط CD عبارت است از:

$$y+2=\frac{-2+1}{0-1}x \longrightarrow y=+x-2$$

$$I=\int\int_{x-2}^{-x+2} 3+2y \, dy\, dx$$

⑨ مطلوب است انتگرال $I=\iint_S \text{Curl}F \cdot \hat{n}\, ds$ را بیابید که S بخشی از کره $x^2+y^2+(z-2)^2=8$ باشد که بالای صفحه xy است، و $\hat{n}$ بردار قائم یکه رو به خارج بر S و

$$\vec{F}=y^2\cos xz\, i+x^3e^{yz}j-e^{-xyz}k$$



توجه کنید که $C: x^2+y^2=8$

$$\vec{R}(t)=2\sqrt{2}\cos t\, i+2\sqrt{2}\sin t\, j+2k$$

$$I=\iint_R \text{Curl}F\cdot(-g_x i-g_y j+k)\,dy\,dx$$

$$z=2 \to g(x,y)=2$$

از طرفی داریم:

$$\text{Curl}F=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2\cos xz & x^3e^{yz} & -e^{-xyz}\end{vmatrix}=i(xze^{-xyz}-x^3ye^{yz})-$$

$$j(yze^{-xyz}+y^2x\sin xz)$$

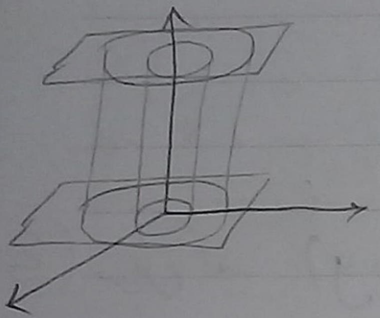
$$+k(3x^2e^{yz}-2y\cos xz)$$

$$I=\iint_{x^2+y^2=8} 3x^2e^{yz}-2y\cos xz\,dy\,dx$$

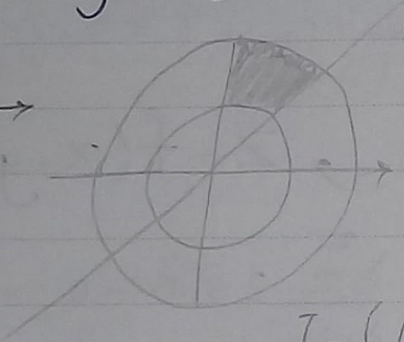
Subject
Date

$$= \iint_R 3x^2 e^{2y} - 2y\cos 2x \, dy\, dx$$

10) مطلوب است $I = \iiint_D (x^2+y^2)\, dv$ ، D ناحیه ی محصور به استوانه ی



$y=x$ و $Z=1$, $z=0$, $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=1$



$$I = \iint_R \int_0^1 (x^2+y^2)\, dz\, dy\, dx$$

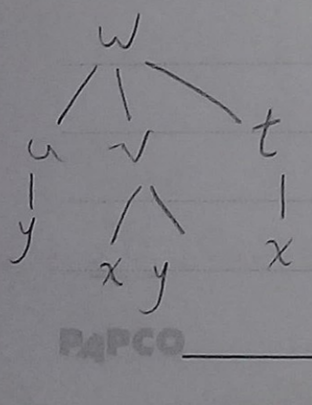
$$I = \iint_R (x^2+y^2)\, dy\, dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 r^3\, dr\, d\theta = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{r^4}{4}\right)\Big]_1^2$$

11) مطلوب است $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(y^2, xy, -x^2)$ برحسب مشتق های

جزئی f . فرض: $w = f(y^2, xy, -x^2)$

$w = f(u, v, t)$ $\quad u = y^2, v = xy, t = -x^2$ $\quad$ { مطلوب است $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$



$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}$$

$$= w_v(u,v,t)\, y + w_t(u,v,t)(-2x)$$

PAPCO

Subject
Date

$2y \quad x$

$$\frac{\partial w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial w_x}{\partial y} = \left(\frac{\partial w_r}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w_r}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}\right) y +$$

$$w_r + \left(\frac{\partial w_t}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w_t}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}\right)(-2x)$$

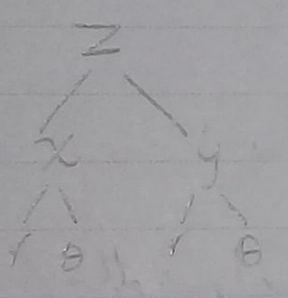
$2x \quad x$

$$= w_{ru}(2y^2) + w_{rr}(xy) + w_r - 4xyw_{tu} - 2x^2 w_{tr}$$

2) فرض کنید $Z = f(x, y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

نشان دهید:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} 2\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\theta$$



$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= Z_x(x,y)\cos\theta + Z_y(x,y)\sin\theta$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial Z_r}{\partial r} = \left(\frac{\partial Z_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial Z_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right)\cos\theta$$

$\cos \quad \sin$

$$+ \left(\frac{\partial Z_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial Z_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right)\sin\theta$$

$\cos\theta \quad \sin\theta$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\theta$$

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\sin\theta\cos\theta$$

Subject
Date

۳) مشتق جهتی تابع $f(x,y,z)=xyz$ را در نقطه‌ی $A\begin{vmatrix}2\\3\\1\end{vmatrix}$ و در جهت بردار $i-j-k$ بیابید.

$$D_u f(A)=\vec{\nabla} f(A).\vec{u}$$

$$\vec{\nabla f}=f_x i+f_y j+f_z k=(yz)i+(xz)j+(xy)k=3i+2j+6k$$

$$\vec{u}=\frac{i-j-k}{\sqrt{3}} \Rightarrow D_u f(A)=\frac{3}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{-5}{\sqrt{3}}$$

۴) میزان تغییرات تابع (مشتق) $f(x,y,z)=xe^{y^2z}$ را در نقطه $A(2,1,0)$ و در جهت بردار $A=i-j+\sqrt{2}k$ بیابید.

$$\vec{\nabla f}=e^{y^2z}i+(2yzxe^{y^2z})j+(xy^2e^{y^2z})k$$

$$\underset{=}{A}\; i+0j+2k \quad , \quad \vec{u}=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\frac{i}{2}-\frac{j}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}k$$

$$D_u f(A)=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$$

۵) نقاط بحرانی تابع $f(x,y)=xye^{-(x+y)}$ را بیابید و رده‌بندی کنید.

$$\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} ye^{-(x+y)}-e^{-(x+y)}xy=0 \\ xe^{-(x+y)}-e^{-(x+y)}xy=0 \end{cases}$$

PAPCO

Subject
Date

$x=1,\ y=0$

$$\begin{cases} e^{-(x+y)}(y-xy)=0 \\ e^{-(x+y)}(x-xy)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y-x\cdot y=0 \to y(1-x)=0 \\ x-xy=0 \end{cases}$$

$x=1 \xrightarrow{②} y=1 \quad A\Big|_1^1$

$y=0 \xrightarrow{②} x=0 \quad B\Big|_0^0$

$\Delta = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$

$$= \left[\left(-e^{-(x+y)} x(y-xy)\right) - y e^{-(x+y)}\right]\left[-e^{-(x+y)}(x-xy) - x\cdot e^{-(x+y)}\right] - \left[-e^{-(x+y)}(y-xy) + (1-x)e^{-(x+y)}\right]^2$$

$A\Big|_1^1 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = (-e^{-2} \times -e^{-2}) = e^{-4} > 0 \\ f_{xx} = -e^{-2} < 0 \end{cases} \Rightarrow$ A نقطه ماکسیمم

$B\Big|_0^0 \to \Delta = 0 - 1 < 0 \Rightarrow$ B نقطه زینی

~~$R(t) = 3\cos t\, i + 3\sin t\, j + t k$~~ ~~$t = \frac{\pi}{2}$~~ (6

T, N, B

$R(t) = (t+\cos t)i + (t-\sin t)j + \sqrt{2}\sin t$

بردارهای ساس، تاو اول، تاو دوم

$t=0$

PAPCO

Subject
Date

$T(t) = \frac{V(t)}{|V(t)|}$, $B = \frac{V \times a}{|V \times a|}$, $V = B \times T$

$\vec{V(t)} = (1 - \sin t)i + (1 - \cos t)j + \sqrt{2}\cos t\, k$

$\vec{a(t)} = (-\cos t)i + (\sin t)j - \sqrt{2}\sin t\, k$

$$V \times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1-\sin t & 1-\cos t & \sqrt{2}\cos t \\ -\cos t & \sin t & -\sqrt{2}\sin t \end{vmatrix} = i(-\sqrt{2}\sin t + \sqrt{2}\sin t\cos t - \sqrt{2}\sin t\cos t) +$$

$$j(-\sqrt{2}\sin t + \sqrt{2}\sin^2 t + \sqrt{2}\cos^2 t) + k(\sin t - \sin^2 t$$

$$+ \cos t - \cos^2 t)k = (-\sqrt{2}\sin t)i + \sqrt{2}(1 - \sin t)j + (-1 + \sin t + \cos t)k$$

$\Rightarrow |V \times a| = 0i + \sqrt{2}j + 0k \rightarrow \vec{B} = j$

$$T = \frac{V(0)}{|V(0)|} = \frac{i + 0j + \sqrt{2}k}{\sqrt{3}} , \vec{N} = B \times T = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}$$

7) فصل مشترک کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و استوانه $x^2 + 2z^2 = 1$ را بدست آورید

و سپس کنج فرنه منحنی بدست آمده را در $t=0$ بیابید.

PAPCO

Subject
Date

$$\vec{R}(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$$

$$x^2 + 2z^2 = 1 \rightarrow x^2 = 1 - 2z^2 \longrightarrow x = \sqrt{1-2z^2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \rightarrow 1 - 2z^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow y^2 - z^2 = 0 \rightarrow y = z$$

$$R(t) = \sqrt{1-2t^2}\,i + tj + tk$$

وسپس N و T و B را بدست آوردیم

8) تابع $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-x^3y^3}{x^2+y^2}$ را در مبدا چنان تعریف کنید که تابع در کل صفحه R^2 پیوسته شود. تابع گویای f در همه‌ی نقاط صفحه جز ریشه‌های مخرج (یعنی در مبدا) پیوسته است.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 - \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} 1 - \frac{r^6 \sin^3\theta \cos^3\theta}{r^2}$$

$$= 1 - \lim_{r\to 0} r^4 \sin^3\theta \cos^3\theta = 1$$

کافیست داشته باشیم $f(0,0) = 1$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

9) رفتار حدی $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ را بررسی کنید.

PAPCO

Subject
Date

$y = mx^2 : \lim_{x\to 0} \frac{2mx^4}{x^4+m^2x^4} = \frac{2m}{1+m^2}$

نشان دهید تابع $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ در مبداء حد دارد.

$\lim_{r\to 0} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\sin\theta\cos^2\theta = 0$

(10) مقدار انتگرال $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ را بدست آورید.

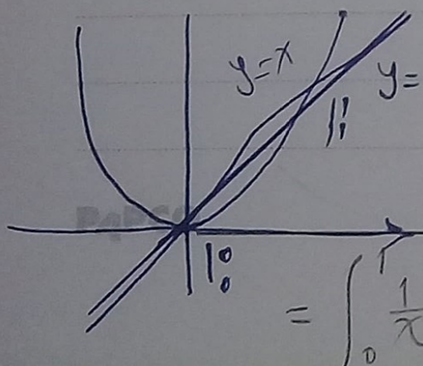
$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = 2\pi\left(\lim \int_0^c re^{-r^2}dr\right) = 2\pi\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)_0^c$

$= -\pi(e^{-c^2} - e^0) = \pi$

$c \to +\infty$

(11) همگرایی یا واگرایی انتگرال $I = \iint_D \frac{dA}{xy}$ را در صورتی تعیین کنید که D ناحیه‌ی کراندار در ربع اول بین منحنی‌های $y=x$ و $y=x^2$ باشد.



$I = \int_0^1\int_{x^2}^{x} \frac{dy\,dx}{xy} = \int_0^1 \frac{1}{x}\left[\ln y\right]_{x^2}^{x} dx$

$= \int_0^1 \frac{1}{x}(\ln x - \ln x^2)dx = -\int_0^1 \frac{\ln x}{x}dx$

Subject

Date

$$= -\lim_{c \to 0} \int_c^1 \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{-1}{2} \lim_{c \to 0} \left[(\ln x)^2 \right]_c^1$$

$$= \lim_{c \to 0^+} \frac{-1}{2} \left(0 - (\ln c)^2 \right) = + \frac{1}{2} (-\infty)^2 = +\infty$$

PAPCO